



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ – UNIOESTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCET
COLEGIADO DO CURSO DE MATEMÁTICA

RELATÓRIO DESCRITIVO-REFLEXIVO DE ESTÁGIO NO PROMAT:
METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA ESTÁGIO
SUPERVISIONADO II

JOHNATON ROCHA PIDORODESKI
LUCAS TEIXEIRA BERNARDO
LUIZ AUGUSTO PELEGRINO
VINICIUS SCARABELOTTO DE SOUZA

Cascavel- PR
2018

RELATÓRIO DESCRITIVO-REFLEXIVO DE ESTÁGIO NO PROMAT:
METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA ESTÁGIO
SUPERVISIONADO II

Curso: Licenciatura em Matemática

Orientadora: Pamela Gonçalves

Cascavel- PR
2018

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

Relatório apresentado pelos acadêmicos Johnaton Rocha Pidorodeski, Lucas Teixeira Bernardo, Luiz Augusto Pelegrino e Vinicius Scarabelotto de Souza como parte integrante da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado II.

Professora Orientadora: Pamela Gonçalves

Local de Execução: Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste.

Sumário

INTRODUÇÃO	5
PROMAT	6
PLANOS DE AULA.....	7
Plano de aula I - Tratamento da informação.....	7
Relato descritivo-reflexivo I	24
Plano de aula II - Relações trigonométricas no triângulo retângulo	26
Relato descritivo-reflexivo II	38
Plano de aula III – Círculo trigonométrico.....	39
Relato descritivo-reflexivo III.....	48
Plano de aula IV - Relações trigonométricas	49
Relato descritivo-reflexivo IV	54
Plano de aula V – Plano cartesiano	56
Relato descritivo-reflexivo V	65
Plano de aula VI – Retas.....	66
Relato descritivo-reflexivo VI	76
Plano de aula VII – Circunferência	78
Relato descritivo-reflexivo VII	85
Plano de aula VIII – Análise Combinatória	86
Relato descritivo-reflexivo VIII.....	92
Plano de aula IX – Análise Combinatória.....	93
Relato descritivo-reflexivo IX	99
Plano de aula X – Probabilidade.....	100
Relato descritivo-reflexivo X.....	107
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	108
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	109
ANEXOS	113
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 01	114
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 02	123
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 03	131
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 04	139

MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 05	141
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 06	145
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 07	150
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 08	156
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 09	159
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 10	163

INTRODUÇÃO

O presente relatório tem como objetivo discutir e refletir sobre o estágio supervisionado relacionado à disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II, realizado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, que se localiza na Rua Universitária, número 2069, bairro Jardim Universitário, do município de Cascavel-PR.

O estágio atendeu a estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE Cascavel, inscritos no programa Promat¹, oferecido pelo Colegiado de Matemática em conjunto com os discentes do curso de graduação em Licenciatura Matemática, sob supervisão e orientação dos docentes do curso de graduação em Matemática; neste caso, sob supervisão da Professora Pamela Gonçalves e orientação da Professora Franciele Antunes. Este estágio supervisionado contou com a carga horária de 36 horas, divididas em nove encontros para a atividade de regência. O estágio aconteceu no segundo semestre do ano de 2018, aos sábados pela manhã.

Durante nossa experiência como professores estagiários do Promat, optamos por planejarmos tal prática docente de acordo com as metodologias de trabalho adotadas pela coordenação do Promat, sendo elas: aulas expositivas; resolução de problemas; resolução de listas de exercícios.

Sendo assim, trabalhamos com os conteúdos de Tratamento da Informação, Trigonometria – no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, relações trigonométricas –, Geometria Analítica – plano cartesiano, retas, circunferência; Análise Combinatória e Probabilidade.

Dessa forma, este relatório de estágio encontra-se organizado por meio de uma explicação acerca dos objetivos do Promat relativamente aos planos de aula elaborados pelo grupo, seguido da apresentação de um relato descritivo-reflexivo do período de planejamento e regência, após os anexos e, conseguinte, verificamos acerca de nossa atividade de docência.

¹ Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: um enfoque à área de Matemática – Promat.

PROMAT

O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: um enfoque à área de Matemática – PROMAT, tem como finalidade a promoção ao acesso e permanência dos estudantes no âmbito educacional, acarretando uma característica social essencial quanto à redução de problemas de ensino ocasionados pela defasagem educacional pública brasileira.

O público alvo são estudantes do Ensino Médio da rede pública de ensino e da comunidade externa à Unioeste - no Campus de Cascavel. O projeto é ofertado anualmente e no ano de 2018 foram disponibilizadas 200 vagas a cada semestre letivo.

O Promat busca emancipar o conhecimento matemático dos estudantes participantes do programa, através de conteúdos que elucidam e possibilitam um bom desempenho em processos seletivos para ingresso a um curso superior. Sendo assim, objetivo é enfatizar os conteúdos matemáticos necessários para a formação do cidadão e do vestibulando.

O curso ofertado pelo Promat foi promovido pelos discentes estagiários e docentes orientadores/supervisores do curso de Licenciatura em Matemática, com base na metodologia de ensino determinada por cada um dos grupos de estágio.

Consideramos que, tanto para os educandos participantes, quanto aos professores estagiários, o Promat se mostra uma ferramenta de fortalecimento e compreensão do Ensino da Matemática, dando suporte para que os estudantes participantes do programa continuem seus estudos além do ambiente escolar, bem como auxilia os discentes estagiários do curso de graduação em Matemática sobre as experiências docentes diversas em sala de aula.

PLANOS DE AULA

Plano de aula I - Tratamento da informação

Professores:

Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius.

Público-Alvo:

Estudantes inscritos no PROMAT.

Tempo de execução:

4h/a.

Objetivo Geral

- Compreender as diversas formas que a matemática está empregada no cotidiano.

Objetivos Específicos

- Interpretar a linguagem matemática e compreender seus conceitos;
- Interpretar os tipos de gráficos;
- Compreender os conceitos de moda, média e mediana;
- Calcular moda, média e mediana.

Conteúdo:

Tratamento da informação.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, material do estudante impresso, projetor.

Avaliação:

Os estudantes serão avaliados de forma diagnóstica e continuada quanto à participação durante as discussões sobre o conteúdo, considerando a assimilação do conteúdo trabalhado e as dificuldades apresentadas pelos alunos durante o processo de resolução das atividades propostas.

Encaminhamento metodológico

Daremos as boas-vindas aos estudantes do Promat, explicando como será o funcionamento dos encontros e como iremos trabalhar os conteúdos.

Em seguida daremos início a nossa aula sobre tratamento da informação, sendo assim dividiremos o conteúdo em:

1 - GRÁFICO E TABELAS

TABELAS

Tabela é a forma não discursiva de apresentação de informações, representadas por dados numéricos e codificações, dispostos em uma ordem determinada, segundo as variáveis analisadas de um fenômeno.

Tabela - Número e proporção de docentes dos Programas de Pós-Graduação em Saúde Coletiva da Capes*, segundo faixa etária, Brasil, 2002.

Faixa etária	N	%
21-30 anos	3	1,3
31-40 anos	16	6,8
41-50 anos	93	39,2
51-60 anos	87	36,7
61 anos ou +	33	13,9
Sem resposta	5	2,1
Total	237	100,0

* Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior

Tabela 1: Disponível em: < http://www.biblioteca.fsp.usp.br/~biblioteca/guia/a_cap_04.htm>. Acesso em: 02 ago. 2018.

EXERCÍCIOS ENEM

1 - (ENEM 2017): No próximo fim de semana, uma pessoa receberá visitas em sua casa, precisando, portanto, comprar refrigerante. Para isso, ela fez a pesquisa de preços em dois supermercados e montou esta tabela.

Volume da garrafa PET (L)	Preço no Supermercado A (R\$)	Preço no Supermercado B (R\$)
0,5	2,10	2,00
1,5	2,70	3,00
2,0	4,20	3,20
2,5	6,00	4,70
3,0	6,90	5,00

Ela pretende comprar apenas garrafas que tenham a mesma capacidade.

Independentemente de em qual supermercado essa pessoa fará a compra, a fim de ter o menor custo, ela deverá adquirir garrafas com que capacidade?

GRÁFICO DE BARRAS

O gráfico de barras (ou de colunas) é utilizado em geral para representar dados de uma tabela de frequências associadas a uma variável qualitativa. Nesse tipo de gráfico, cada barra retangular representa a frequência ou a frequência relativa da respectiva opção da variável. Veja a seguir um exemplo de gráfico de barras:

Exemplo:

Desmatamento na Amazônia cresce 3,8% – Em 28/11, o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) informou que o desmatamento na região da Amazônia, medido entre agosto de 2007 e julho de 2008, foi de 11.968 km², de acordo com o resultado do Projeto de monitoramento na Amazônia Legal (Prodes).

O desmatamento da Amazônia a cada ano	
Ano	Área desmatada (km ²)
2003	25 282
2004	27 423
2005	18 759
2006	14 039
2007	11 224
2008	11968

A taxa 2007-2008 é 3,8% maior que o desmatamento medido no período anterior.

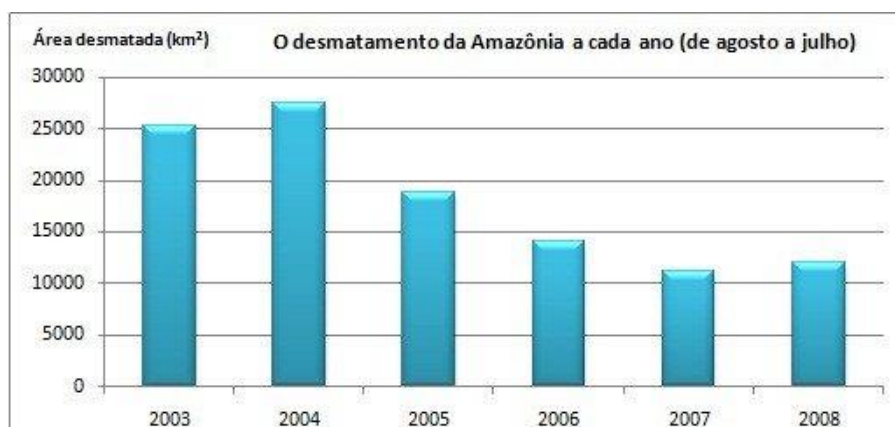
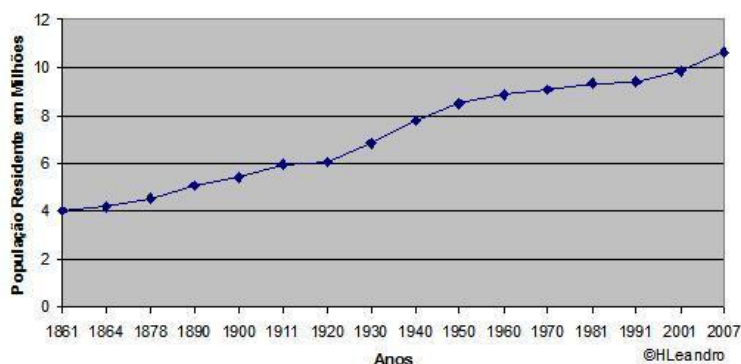


GRÁFICO DE LINHAS

O gráfico de linhas (ou de segmentos) é utilizado, em geral, para representar a evolução dos valores de uma variável no decorrer do tempo. Veja alguns exemplos de gráficos de linhas a seguir:

Evolução da população residente em Portugal 1861 – 2007

Evolução da População Residente em Portugal entre 1861 e 2007



Disponível em: <http://ticg4-38224.blogspot.com/2008/11/evolucao-da-populacao-residente-em-portugal.html>.

Acesso em: 02 ago. 2018.

GRÁFICO DE SETORES

Um gráfico circular ou sectograma é representado através de um círculo dividido em setores circulares, sendo as suas áreas diretamente proporcionais às frequências correspondentes. Ou seja, a amplitude do ângulo ao centro de cada setor circular é diretamente proporcional à frequência que representa. Facilmente se obtém essas amplitudes, em graus, multiplicando a frequência relativa por 360°.

Veja a seguir uma tabela e um gráfico de setores indicando os setores que produzem os gases que intensificam o efeito estufa.

Setores que produzem os gases que intensificam o efeito estufa (2007)	
Setores	Porcentagem
Energia	25,9%
Indústria e Transporte	32,5%
Floresta e Agricultura	30,9%
*Residências, Comércio, Lixo e Esgoto	10,7%



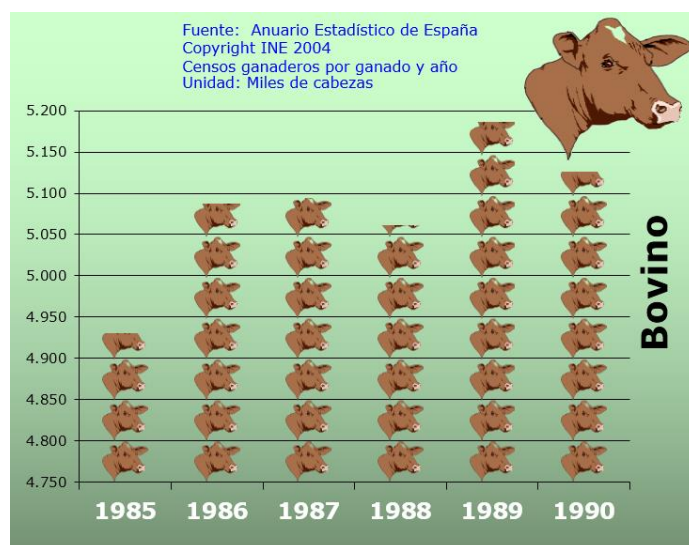
Disponível em: <https://blogdoenem.com.br/tipos-de-grafico-e-interpretacao-analise-grafica-para-o-enem/>

PICTOGRAMAS

A fim de tornar os gráficos mais atraentes, os meios de comunicação, como revistas, jornais, entre outros, costumam ilustrá-los com imagens relacionadas ao contexto do qual as informações fazem parte. Essa forma de representação é denominada pictograma ou gráfico pictórico.

Nesse tipo de representação, assim como nos gráficos tradicionais, as dimensões das imagens devem ser proporcionais aos dados apresentados.

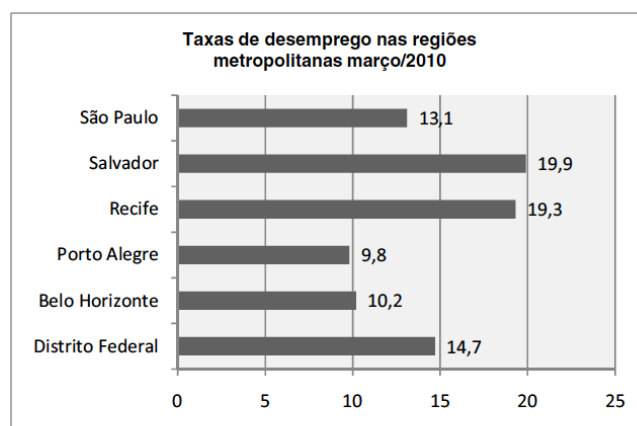
Veja um exemplo:



Disponível em: <http://3con14.eu/excel/gr%C3%A1ficos/14-pictogramas.html>

EXERCÍCIOS

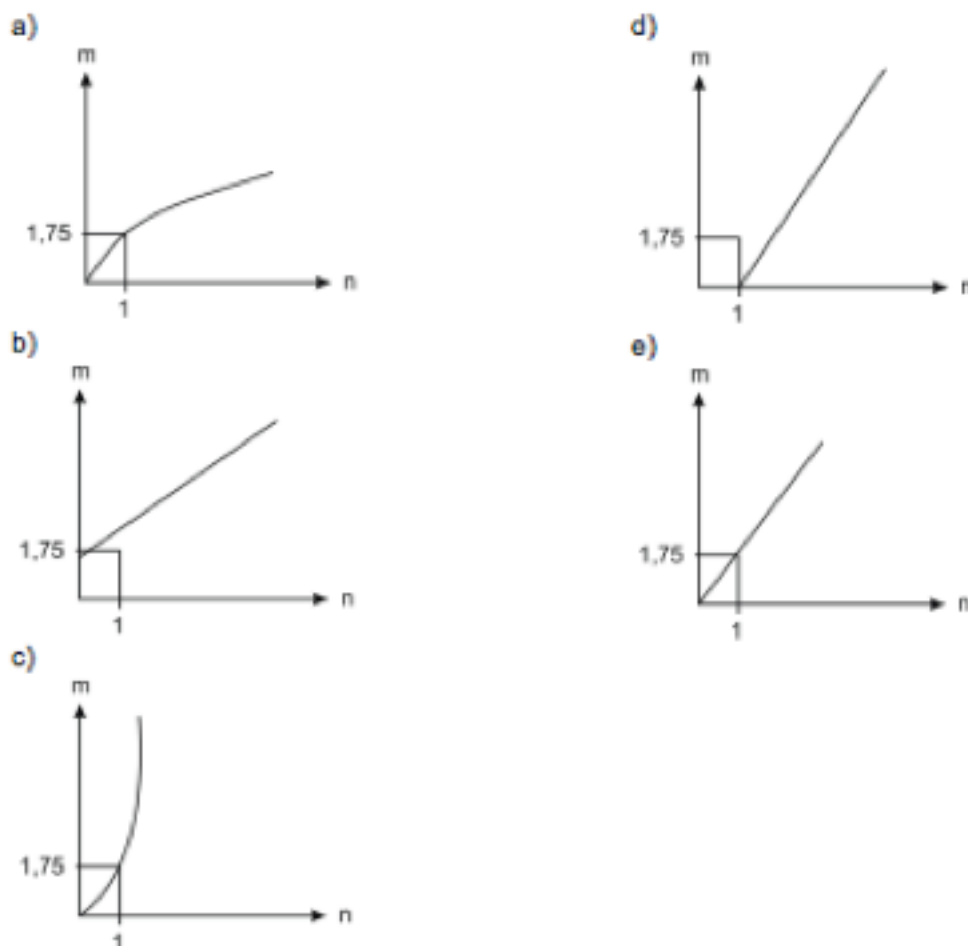
2 - (ENEM 2010): Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).



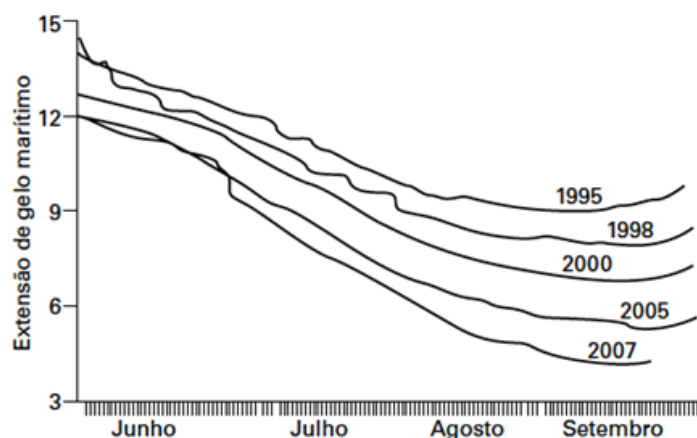
Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de

3 - (ENEM 2011): As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R\$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é

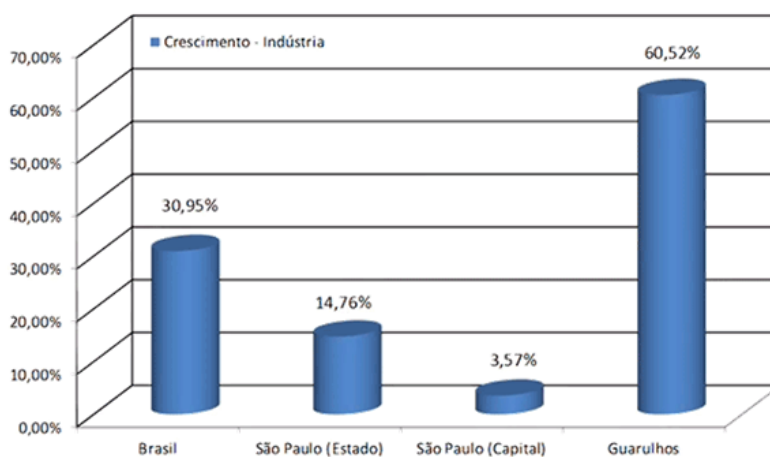


4 - (ENEM 2012): O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007. Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.



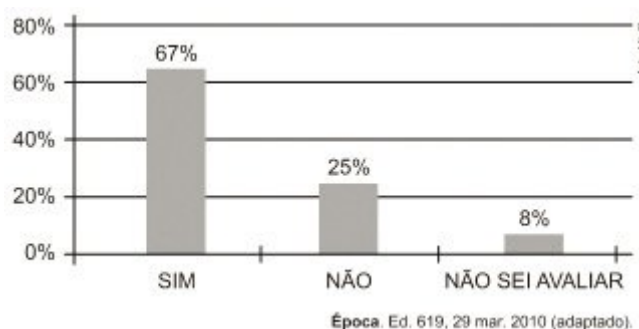
Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em

5 - (ENEM 2013): A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico



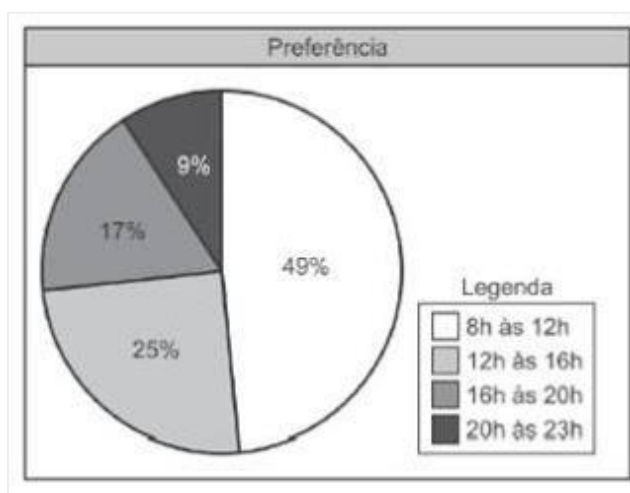
Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

6 - (ENEM 2011): Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam “Não” à pesquisa?

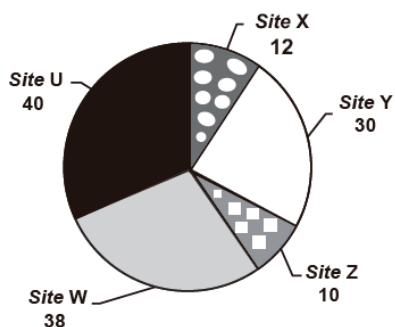
7 - Uma rede de supermercados resolveu fazer uma pesquisa para saber qual horário as pessoas mais gostavam de ir ao supermercado. Foram entrevistadas 2000 pessoas e o resultado está no gráfico abaixo.



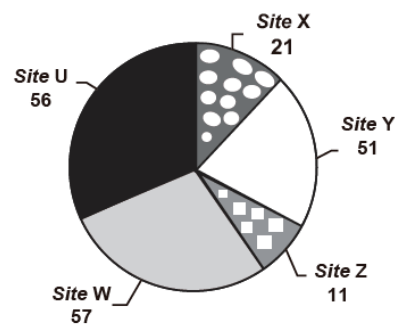
Durante qual horário a maioria das pessoas entrevistadas preferem ir ao supermercado?

8 - (ENEM 2017): Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um mini aplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco sites visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco sites mais acessados. A seguir, temos os dados do mini aplicativo para esses dias.

Tempo de acesso na sexta-feira (minuto)



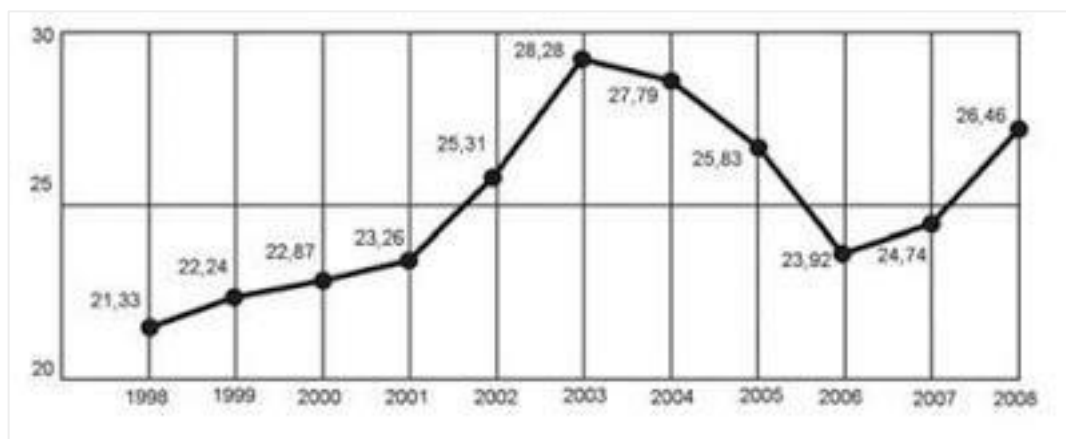
Tempo de acesso no sábado (minuto)



Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site*?

9 - (ENEM 2011): O termo agronegócios não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro



Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de?

3 - Média aritmética, mediana e moda

Média, Moda e Mediana são medidas de tendência central utilizadas em estatísticas.

A Estatística trabalha com diversas informações que são apresentadas por meio de gráficos e tabelas e com diversos números que representam e caracterizam um determinado conjunto de dados. Dentre todas as informações, podemos retirar valores que representem, de algum modo, todo o conjunto. Esses valores são denominados “Medidas de Tendência Central ou Medidas de Centralidade”.

As medidas de centralidade são a **Média Aritmética**, a **Moda** e a **Mediana**.

Vamos mostrar a seguir o que vem a ser cada uma delas.

Média Aritmética

É uma das medidas de tendência central mais utilizadas no cotidiano.

É determinada pelo resultado da divisão do somatório dos números dados pela quantidade de números somados.

Por exemplo, vamos determinar a média dos números 3, 12, 23, 15, 2.

Para isso basta somarmos todos os números e dividirmos pela quantidade de números, ou seja:

$$\text{Média Aritmética} = \frac{3+12+23+15+2}{5} = \mathbf{11}$$

O cálculo da Média Aritmética é frequentemente usado nas escolas para efetuar a média final dos alunos, em campeonatos de futebol para se obter a média de gols de uma determinada rodada ou mesmo do campeonato; é também utilizado em diversas pesquisas estatísticas, pois determina o direcionamento das ideias expressas em determinados estudos.

Moda

É a medida de tendência central que consiste no valor observado com mais frequência em um conjunto de dados.

Por exemplo, digamos que o Palmeiras em determinado torneio de futebol fez, em dez partidas, a seguinte quantidade de gols:

5, 4, 2, 1, 3, 7, 1, 1, 2 e 1.

Para essa sequência de gols marcados, a moda é de 1 gol, pois é o número que aparece mais vezes.

Outra situação comum seria se dentre 7 pessoas tomássemos suas idades, a saber:

15 anos, 20 anos, 32 anos, 13 anos, 5 anos, 43 anos e 90 anos.

Nesse caso, não há moda, pois nenhuma idade se repetiu mais vezes que a outra.

Observação: Quando um conjunto de dados não apresenta moda, dizemos que esse conjunto é **amodal**.

Caso exista uma moda, denominamos o conjunto de **Unimodal**.

Existindo duas modas, denominamos o conjunto de **bimodal** e assim sucessivamente.

Mediana

É a medida de tendência central que indica exatamente o valor central de um conjunto de dados quando organizados em ordem crescente ou decrescente.

Por exemplo, vamos considerar que um aluno tirou as seguintes notas em cinco provas de uma determinada matéria:

5, 8, 7, 4 e 8.

Colocando as cinco notas em ordem crescente, por exemplo, obtemos $4 < 5 < 7 < 8 = 8$.

A mediana é o valor que está no centro dessa sequência, ou seja, 7.

E alguém poderia perguntar: Mas se ao invés de cinco notas fossem seis?

Pois bem, nesse caso ao ordenarmos os números, teremos dois termos centrais ao invés de um. Por exemplo, digamos que as notas agora são

5, 2, 8, 7, 4 e 8.

Colocando em ordem crescente, temos $2 < 4 < 5 < 7 < 8 = 8$

Aqui, os dois termos centrais seriam 5 e 7. Portanto, a Mediana desse conjunto de dados é a Média Aritmética dos dois termos centrais, ou seja,

$$\text{Mediana} = \frac{5+7}{2} = 6$$

Resumindo o cálculo da Mediana:

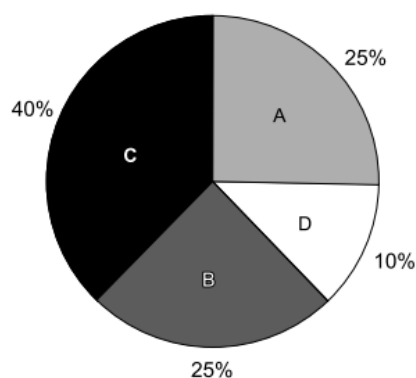
- Coloque os valores do conjunto de dados em ordem crescente ou decrescente;
- Se a quantidade de valores do conjunto for ímpar, a mediana é o valor central;
- Se a quantidade de valores do conjunto for par, é preciso tirar a Média Aritmética dos valores centrais.

10 - (ENEM 2012): A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual. As empresas que este investidor escolhe comprar são:

11 - (ENEM 2013): Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R\$ 200,00; B = R\$ 300,00; C = R\$ 400,00 e D = R\$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é

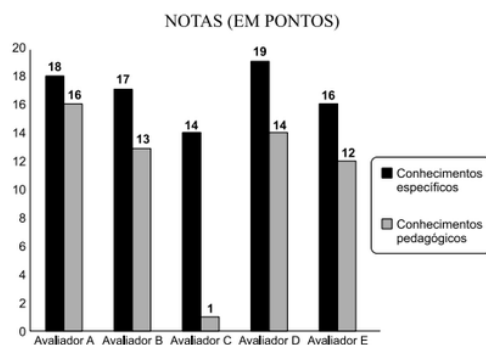
12 - (ENEM 2009): Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe

- teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
- seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
- seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
- permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
- empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

13 - (ENEM 2013): As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final

do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

14 - (ENEM 2013): Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

15 - (ENEM 2010): O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

- a) $X = Y < Z$.
- b) $Z < X = Y$.
- c) $Y < Z < X$.
- d) $Z < X < Y$.
- e) $Z < Y < X$.

REFERÊNCIAS

EXERCÍCIO Enem 2013. Disponível em: <<http://educacao.globo.com/provas/enem-2013/questoes/162.html>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

EXERCÍCIO Enem. Disponível em: <<http://matematicacentrao3.blogspot.com/2014/08/exercicios-sobre-graficos-estatisticos.html>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

EXERCÍCIO Enem. Disponível em: <<http://educacao.globo.com/provas/enem-2013/questoes/137.html>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

GRÁFICOS e Tabelas. Disponível em: <<https://blogdoenem.com.br/tipos-de-grafico-e-interpretacao-analise-grafica-para-o-enem/>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

MÉDIA, moda e mediana. Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/tratamento-da-informacao-medidas-de-tendencia-central/medidas-de-tendencia-central-passando-a-limpo-as-ideias/>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

Relato descritivo-reflexivo I

Iniciamos a nossa primeira aula do Promat nos apresentando como professores-estagiários, dando as boas-vindas aos estudantes e solicitando-lhes apresentações e informações sobre seus trajetos escolares. Logo, também discutimos sobre o funcionamento dos encontros que teríamos e como seriam divididas as aulas, sendo a primeira sobre tratamento da informação.

Começamos nossa atividade falando sobre os tipos de gráficos mais utilizados e recorrentes no cotidiano e, após cada tópico, propúnhamos exercícios contendo gráficos. Destacaram-se, nestas situações, as relações dentre o conteúdo estudado e a possibilidade de que tais gráficos fossem encontrados no cotidiano do estudante, desde o ambiente escolar, até sua vivência mais ampla em sociedade: vestibulares, Enem, livros didáticos, revistas, jornais, pesquisas governamentais, censos, entre outros, para que compreendessem a mensagem que o gráfico poderia transmitir.

Neste sentido de significar o conteúdo estudado às possibilidades de aplicação e uso cotidiano, buscamos elaborar e adaptar atividades dos Enem's, e de vestibulares que continham enunciados diversos, tal como interpretação de gráficos e respectivas tabelas. Percebemos, nesta situação, certa facilidade de compreensão este conteúdo pelos estudantes.

Após explicarmos o conteúdo, aplicamos a primeira atividade, que consistia em analisar uma tabela contendo preços de refrigerante e com volume diferente, notamos que os alunos compreenderam a questão, todavia tivemos algumas interpretações divergentes em relação a resposta, por isso, quando formalizamos, notamos que alguns alunos entenderam que era para analisar a quantidade de garrafas a serem compradas, enquanto outros, através de uma tabela, elaboraram suas contas e então informaram que seria mais vantajoso adquirir a garrafa de um litro e meio que custava R\$ 2,70.

A próxima atividade relacionada a gráfico de barras, os alunos resolveram sem muita dificuldade, pois consistia em encontrar a porcentagem da taxa de desemprego em uma determinada cidade. Na atividade três, demorou um pouco até eles perceberem que se tratava de uma função afim, coisa que facilitou a compreensão do gráfico e qual era o que estava de acordo com o enunciado da questão.

Os alunos tiveram bastante dificuldade em resolver a atividade quatro, pois se tratava de um gráfico de linha com algumas funções decrescentes que representavam o avanço do degelo no decorrer dos anos no ártico, e o enunciado pedia exatamente o ano em que tivemos

o maior degelo, logo os alunos entenderam que a função que estava mais longe do eixo da abcissa indicava o ano com maior degelo, quando na realidade era o contrário, esta questão gerou uma dinâmica em que os alunos dialogavam a respeito deste gráfico, quando formalizamos a questão, eles conseguiram entrar em consenso . deixamos as outras atividades como tarefa de casa.

Seguidamente, introduzimos o conteúdo de tratamento da informação relativo à estatística básica: Moda, Média aritmética e Mediana. Para cada um desses temas, explicamos através de exemplos e, em seguida, propusemos atividades que mesclam o conteúdo anterior com este, instigando a interpretação de gráficos.

Nos exercícios envolvendo estatística, observamos que os alunos tiveram mais dificuldade em entender e resolver as questões, talvez por ser uma sala com alunos provenientes de todas as series do ensino médio, inclusive tínhamos uma aluna do nono ano do ensino fundamental dois. A questão dez por exemplo demorou mais do que o tempo estipulado para a sua conclusão, pois os alunos confundiam media e mediana, sendo necessário retomar a explicação pois aparentemente não ficou claro para eles a diferenças entre ambos, após explicarmos novamente, percebemos uma melhora na compreensão deles. Infelizmente conseguimos trabalhar até a questão 11, deixamos o restante como tarefa de casa, e se porventura eles tivessem duvidas no decorrer da semana, poderiam nos consultar através das redes sociais.

Plano de aula II - Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Professores:

Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius.

Público-Alvo:

Estudantes inscritos no Promat.

Tempo de execução:

4h/a.

Objetivo Geral

- Construir os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo, por meio da resolução de problemas.

Objetivos Específicos

- Relembrar o teorema de Pitágoras;
- Relembrar as relações trigonométricas no triângulo retângulo;
- Definir seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo;
- Resolver problemas que envolvam seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

Conteúdo:

Relações trigonométricas no triângulo retângulo;

Recursos Didáticos:

Material impresso do estudante, giz, quadro negro e projetor.

Avaliação:

Os estudantes serão avaliados de forma diagnóstica e continuada quanto à participação durante as discussões sobre o conteúdo, considerando a assimilação do conteúdo trabalhado e as dificuldades que forem apresentadas pelos alunos durante o processo de resolução das atividades propostas.

Encaminhamento metodológico:

Introdução (1 aula e meia com correção)

Teorema de Pitágoras: "a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa."

Segundo o enunciado do Teorema de Pitágoras, a fórmula é representada da seguinte maneira:

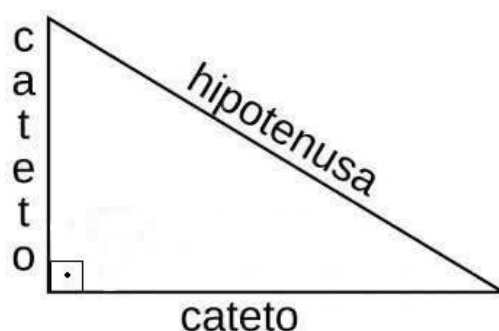
$$h^2 = ca^2 + co^2$$

Sendo,

h: hipotenusa

ca: cateto adjacente

co: cateto oposto



Os catetos do triângulo retângulo são os menores lados dessa figura geométrica. Juntos, eles formam o ângulo reto, sendo classificados em: cateto adjacente e cateto oposto.

Importante ressaltar que o “cateto adjacente” e o “cateto oposto” dependerão do ângulo de referência. Ou seja, eles serão revelados segundo a posição em relação a um dado ângulo do triângulo retângulo.

O cateto que está junto ao ângulo de referência, é chamado de adjacente; por outro lado, se está oposto a este ângulo, é chamado de oposto.

Já a hipotenusa, é o maior lado do triângulo retângulo e o lado oposto ao ângulo reto.

Juntos, os catetos e a hipotenusa são denominados de “terno pitagórico” ou “trio pitagórico”. Eles são representados por três números inteiros positivos, os quais correspondem aos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

Exercício 1.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, calcule os valores indicados em cada item.

a) Qual a medida da hipotenusa num triângulo retângulo de catetos de medidas 3 e 4?

b) Qual a medida do cateto b num triângulo retângulo de hipotenusa medindo 13 e cateto c = 12?

Exercício 2.

A Recíproca do Teorema de Pitágoras, enuncia que:

“se as medidas dos três lados de um triângulo qualquer satisfazem a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo”.

Dentre os ternos (a,b,c) de números inteiros listados, com $a < b < c$, qual(is) dele(s) poderiam ser lados de triângulo(s) retângulo(s)?

a) (5,12,13).

b) (8,15,17).

c) (7,24,25).

d) (12,35,37).

e) (11,60,61).

f) (20,21,29).

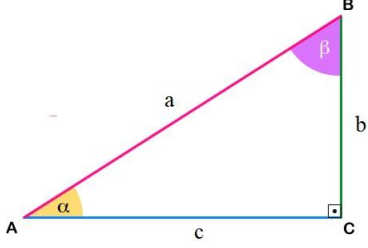
g) (9,40,41).

Relações trigonométricas num triângulo retângulo

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$	$\text{sen } \beta = \frac{c}{a}$	
$\text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$	$\text{cos } \beta = \frac{b}{a}$	
$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$	$\text{tg } \beta = \frac{c}{b}$	
$\alpha + \beta = 90^\circ$		

Teorema 1: Se $\alpha + \beta = 90^\circ$, então $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$ e $\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha$.

Teorema 2: Se $\alpha + \beta = 90^\circ$, então $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta}$

Exercício 3.

Dentre os ângulos agudos dos triângulos retângulos do exercício 2, qual possui o maior seno?

Exercício 4.

Quais os senos, cossenos e tangentes dos ângulos agudos do triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

Exercício 5.

Um triângulo tem lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm. Outro triângulo tem lados medindo 9 cm, 12 cm e 15 cm. Os ângulos desses triângulos são iguais?

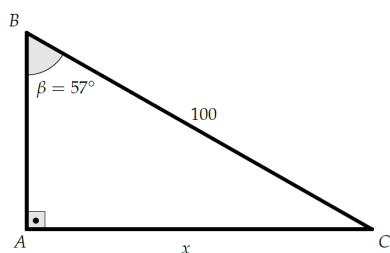
Exercício 6.

Utilizando os dados aproximados da tabela 2, calcule o que se pede.

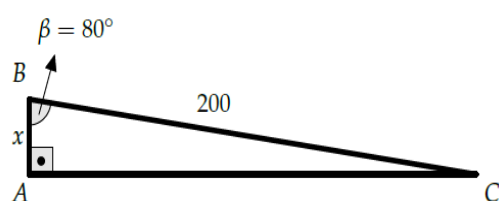
Tabela 2: Senos, cossenos e tangentes.

Arco	sen	cos	tg
15°	0,26	0,97	0,27
20°	0,34	0,93	0,37
30°	0,5	0,87	0,58
40°	0,64	0,77	0,84
57°	0,84	0,54	1,54
80°	0,98	0,17	5,67

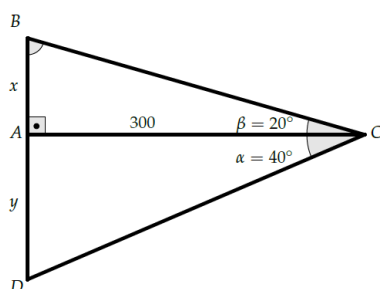
a) Determine valor de $AC = x$.



b) Determine valor de $AB = x$.



c) Determine valor de $BD = x + y$.



d) Seja o $\triangle ABC$, retângulo em B, com $\hat{B}AC = 15^\circ$ e $D \in AB$ tal que $\hat{A}DC = 150^\circ$. Sendo $DB = 400$ cm, qual o valor de AC?

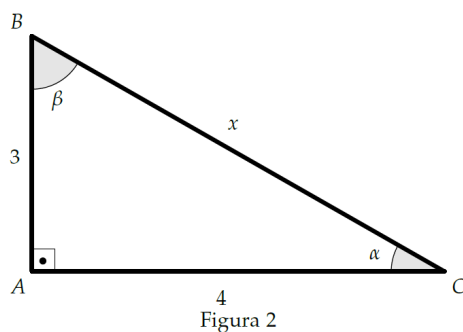
e) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 34 e 93, qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de menor medida?

f) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 26 e 97. Qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de maior medida?

g) Num triângulo retângulo com um ângulo medindo 30° , prove que o seu cateto oposto é metade da hipotenusa.

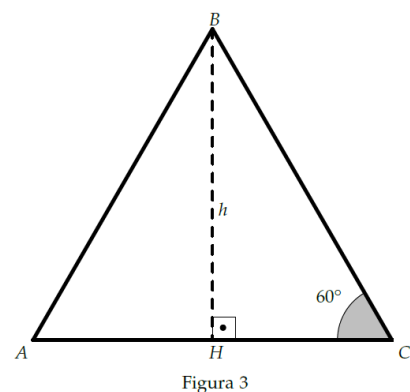
Exercício 7.

No triângulo da figura 2, calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes de α e β .



Exercício 8.

A figura 3 representa um $\triangle ABC$, equilátero, com lado medindo 2 cm e uma altura BH.



Quais os valores do(a):

a) $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ e $\tan 60^\circ$?

b) $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ e $\tan 30^\circ$?

Exercício 9.

Uma escada rolante liga dois andares de uma loja e tem uma inclinação de 30° . Sabendo que a escada rolante tem 10 m de comprimento, qual é a altura entre os dois andares?

Exercício 10.

A partir de um quadrado de lado medindo 1 cm, determine as medidas de seno, cosseno e da tangente de 45° .

Exercício 11.

Uma pessoa na margem de um rio vê sob um ângulo de 60° uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta 30 metros este ângulo diminui para 30° . Qual é a largura do rio?

Com os exercícios 8 e 10, conseguimos mostrar os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

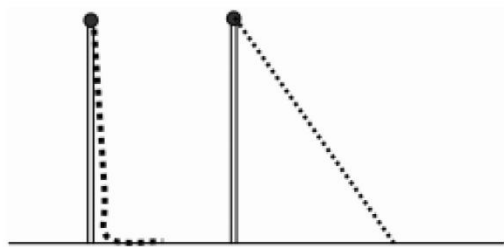
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<u>tan</u>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	<u>1</u>	$\sqrt{3}$

Fixação (1 aula e meia com correção)

Exercício 12.

No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede 3 chih. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca no solo a uma distância de 8 chih do pé do bambu. Que comprimento tem o bambu?

(Chih antiga unidade de medida chinesa, conhecido como “pé chinês”. Seu comprimento é derivado do comprimento do antebraço humano.)



Exercício 13.

Sobre uma rampa de 6 m de comprimento e inclinação de 30° com a horizontal, devem-se construir degraus de altura 25 cm. Quantos degraus desse tipo serão construídos?

Exercício 14.

Ao atender o chamado de um incêndio em um edifício, o corpo de bombeiros de uma cidade utilizou um veículo de combate a incêndio, dotado de escada magirus. Esse veículo possibilita atender a resgates a uma altura máxima de 54 metros, utilizando um ângulo máximo de levantamento de 60° .

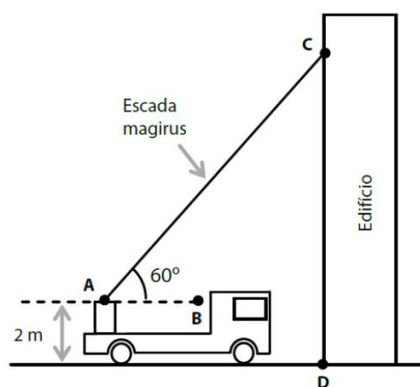


Figura 6

- Qual o comprimento dessa escada quando totalmente esticada?
- Houve um problema e o ângulo de levantamento foi reduzido em 25%. Qual anova altura máxima alcançada?

Exercício 18.

Um observador está em um ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10° com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao

seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14° . Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?

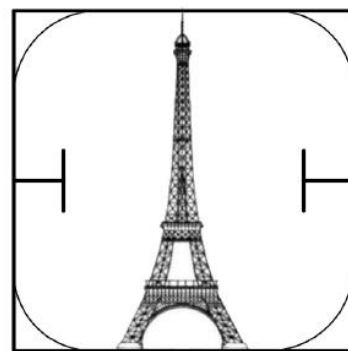
Dados: $\operatorname{tg} 10^\circ = 0,1763$ e $\operatorname{tg} 14^\circ = 0,2493$.

Exercício 20.

Uma pessoa de 2 m de altura, passeando pela cidade, caminha em linha reta numa rua horizontal, na direção da portaria de um edifício. A pessoa olha o topo desse edifício, o que a obriga a olhar para cima num ângulo de 30 graus com a horizontal. Após caminhar 49 m, para uma segunda vez para ver o topo do edifício e tem que olhar para cima num ângulo de 45 graus com a horizontal. Utilize $\sqrt{3} = 1,7$. Nessa situação, qual a altura do prédio?

Exercício 21.

A Torre Eiffel tem 324 m da altura (contando com a antena), e deseja-se fotografá-la completamente usando uma câmera com lente de abertura de 40° . Qual a mínima distância da torre (no plano da sua base) para que uma foto com essa câmera capture a torre inteira, como ilustra a seguir.



Aprofundamento (1 aula com correção)

Exercício 25.

Três goiabas perfeitamente esféricas de centros C_1 , C_2 e C_3 , e raios 2 cm, 8 cm e 2 cm, respectivamente, estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura 16.

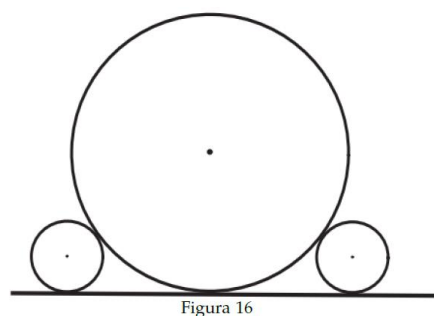


Figura 16

Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?

Exercício 27.

Para calcular a altura de um morro, um topógrafo posicionou-se com seu teodolito a 200 m do morro e o aparelho forneceu a medida do ângulo de visada do morro: 30° . O topógrafo, olhando numa tabela, considerou $\text{tg } 30^\circ = 0,57$. Se a altura do teodolito é 1,60 m, qual é a altura, em metros, do morro obtida pelo topógrafo?

- a) 352,48.
- b) 125,60.
- c) 118,20.
- d) 115,60.
- e) 114.

Exercício 28.

Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm. A soma das tangentes dos ângulos agudos é aproximadamente:

- a) 1.
- b) 1,3.
- c) 2.
- d) 2,5.
- e) 2,8.

Exercício 30.

Na figura 20, estão assinalados três ângulos retos, e três ângulos de medida α . Sendo $AB = 1$ e $BC = 5$, o valor de $\cos \alpha$ é

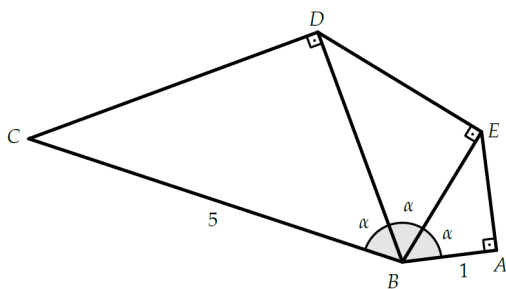


Figura 20

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. c) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$. d) $\sqrt[3]{5}$. e) $\frac{1}{5}$

Exercício 32.

Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30° , conforme a figura 25. A velocidade, em km/h, desse avião era de:

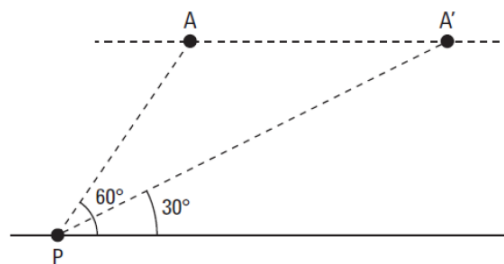


Figura 25

- a) 180. b) 240. c) 120. d) 150. e) 200

Referências

TEOREMA de Pitágoras. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/teorema-de-pitagoras/>>. Acesso em: 16 jun. 2018.

EXERCÍCIOS. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=11#>>>. Acesso em: 16.jun.2018.

EXERCÍCIOS. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsynurr1hh6w.pdf>. Acesso em: 16.jun.2018

Neste dia, iniciamos a primeira aula do conteúdo de Trigonometria com os conceitos de relações trigonométricas aplicadas ao triângulo retângulo. Neste sentido, optamos por trabalhar com as definições e conceituações básicas buscando mostrar aos estudantes de onde surgem as fórmulas que são ensinadas nas escolas.

Sendo assim, iniciamos a aula com o conceito do Teorema de Pitágoras, perguntando aos estudantes se conheciam tal teorema ou para que poderíamos utiliza-lo. Conforme compreendemos, os estudantes apresentaram-se acanhados e não participaram ativamente das discussões em classe, não interagindo como planejado.

Ao esclarecermos sobre o teorema supracitado, buscamos mostrar aos estudantes as relações de seno, cosseno e tangente aplicadas ao triângulo retângulo. Durante a explicação os educandos não demonstraram dúvidas e, com isso, solicitamos que iniciassem os exercícios do material do estudante – material impresso, disponibilizado pelos professores estagiários. Assim, no decorrer das resoluções destes exercícios, os estudantes chamavam os professores estagiários para esclarecimento de dúvidas.

Nesta ocasião, observamos que uma estudante não conseguia desenvolver os exercícios propostos e, com isso, um dos professores estagiários tentou conversar com ela para que pudesse entender quais eram suas dúvidas. No entanto, não obteve resposta ou atenção da educanda. Posteriormente à aula, nós, professores estagiários, discutimos sobre tal acontecimento, levantando possibilidades para melhor atender tal estudante que, também se destacou pela vergonha de interagir relacionada com a idade mais avançada que possuía, compara aos demais estudantes adolescentes. Outra informação discutida sobre tal situação diz respeito a estudante ter sentido segurança para conversar e tirar dúvidas com apenas um dos professores estagiários.

Observamos que os estudantes não interagiam durante as explicações, contudo conseguiam entender os conceitos e exercita-los, pois demonstravam interesse em resolver as atividades propostas e a tirar suas dúvidas individualmente com os professores estagiários.

No decorrer deste encontro, houve a necessidade de que mudássemos o planejamento, que englobava muitos exercícios até a concretização dos conceitos discutidos, devido ao tempo empregado para exercícios específicos que retomaram maior atenção e detalhamento informativo. Assim, os exercícios restantes foram propostos para tarefa para casa.

Plano de aula III – Círculo trigonométrico

Professores:

Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius.

Público-Alvo:

Estudantes inscritos no Promat.

Tempo de execução:

4h/a.

Objetivo Geral:

- Compreender o conceito e a construção do ciclo trigonométrico;
- Relembrar as relações fundamentais do triângulo retângulo;
- Compreender regularidade e padrões dessas relações.

Conteúdo:

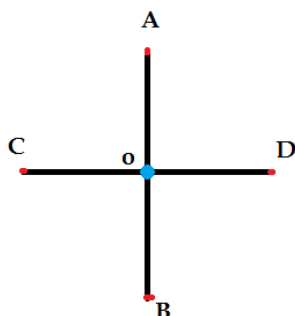
Círculo trigonométrico.

Recursos Didáticos:

Instrumentos de desenho e medição (régua, compasso, transferidor, lápis), material do estudante e multimídia.

Encaminhamento metodológico

Definimos novamente os catetos oposto, cateto adjacente e hipotenusa. Em seguida cada aluno deve receber uma folha de papel A4 com uma figura na qual há um segmento AB 10 cm perpendicular a um segmento CD 10 cm, e com intersecção entre seus respectivos pontos médios.

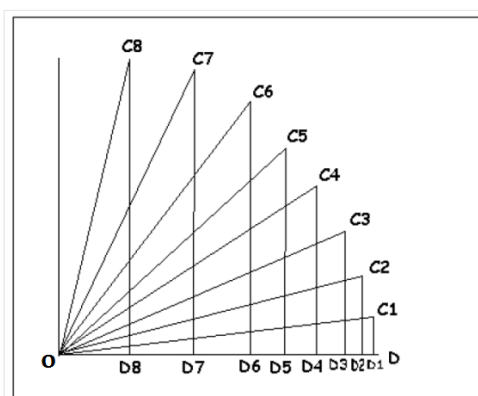


Atividade1:

Faça as seguintes atividades em sequência, na folha que lhes foi dado construa uma reta que passa por O e forma um ângulo alfa medindo 10° com o segmento OB;

- Sob a reta construída determine um segmento OC1 medindo 5 centímetros;
- Sendo a hipotenusa OC1, construa um triângulo retângulo de maneira que o ângulo de 90° esteja no vértice D1, e que este ponto esteja no segmento OB;
- Faça este mesmo procedimento para os ângulos de 20° , 30° , 40° ... 340° , 350° .

Espera-se que os alunos consigam desenhar todos os triângulos tal como aparece na figura abaixo, para o primeiro quadrante:



Espera-se que os alunos utilizem a régua medindo o cateto adjacente e o cateto oposto, assim como anotem esses valores na tabela dada.

De posse do desenho, será dada a tabela abaixo com valores dos ângulos utilizados na primeira questão e será pedido para obter algumas informações do mesmo

Atividade2:

Com a régua, meça e anote na tabela os valores dos catetos oposto e adjacente para cada ângulo desenhado no exercício anterior.

	Cateto Oposto a α	Cateto Adjacente a α
$\alpha = 10^\circ$		
$\alpha = 20^\circ$		
$\alpha = 30^\circ$		
$\alpha = 40^\circ$		
$\alpha = 50^\circ$		
$\alpha = 60^\circ$		
$\alpha = 70^\circ$		
$\alpha = 80^\circ$		

$\alpha = 160$		
$\alpha = 170^\circ$		
$\alpha = 190^\circ$		
$\alpha = 200^\circ$		
$\alpha = 280^\circ$		
$\alpha = 290^\circ$		
$\alpha = 300^\circ$		
$\alpha = 310^\circ$		
$\alpha = 350^\circ$		

Atividade 3

Com a calculadora, obtenha e anote na tabela dada os valores do seno e cosseno referente ao ângulo enunciados na **Atividade 1**.

Para preencher as tabelas abaixo, pedimos para os alunos obter os valores do seno e cosseno para cada ângulo:

	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 70^\circ$
Seno				
Cosseno				

	$\alpha = 100^\circ$	$\alpha = 110^\circ$	$\alpha = 170^\circ$	$\alpha = 160^\circ$
Seno				
Cosseno				

	$\alpha = 190^\circ$	$\alpha = 200^\circ$	$\alpha = 280^\circ$	$\alpha = 290^\circ$
Seno		3420	0,1736	
Cosseno				

	$\alpha = 280^\circ$	$\alpha = 290^\circ$	$\alpha = 300^\circ$	$\alpha = 310^\circ$
Seno				
Cosseno				

Atividade 4: Que figura aparece na **atividade1** se ligarmos os pontos C1 e C2, C2 e C3 e assim por diante?

Atividade 5: Observando a tabela dada na Atividade 3, o que podemos concluir sobre o seno 10° e o cos 80° ? E sobre o sen 20° e cos 70° ? Justifique sua resposta.

Espera-se que os alunos concluam que o seno 10° e o cosseno 80° , por exemplo são iguais. Uma possível justificativa é comparar os triângulos com $\alpha = 10^\circ$ e $\alpha = 80^\circ$, verificando que cateto oposto do primeiro tem a mesma medida do cateto adjacente do segundo. Isso pode ser observado na figura abaixo.

Atividade 6: Há outros ângulos que a medida do seno e do cosseno são iguais? Qual a relação entre os ângulos em que a medida do seno e do cosseno, são iguais? Os triângulos são iguais?

Espera-se que os alunos concluam que há outros casos em que a medida do seno de determinado ângulo é igual a medida do cosseno de outro ângulo;

Atividade 7: Dada a tabela responda:

	3°	2°	1°	$0,5^\circ$
Seno	0,05233	0,03489	0,01745	0,00872
Cosseno	0,99862	0,99939	0,999847	0,99996

Quanto será o valor do sen a, para a muito próximo de 0° ? Quanto será o valor do cos a, para muito próximo de 0° ?

Atividade 8: Dada a tabela responda

	87°	88°	89°	$89,5^\circ$
Seno	0,99862	0,99939	0,999847	0,99996
Cosseno	0,05233	0,03489	0,01745	0,00872

Quanto será o valor do seno a, para á muito próximo de 90° ? Quanto será o valor do cos a, para á muito próximo de 90° ?

Agora vamos tentar comprovar a conjectura proposta na **atividade3**.

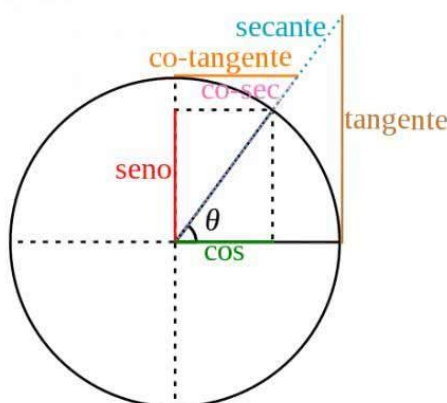
Atividade. 10: Sejam α e β dois ângulos quaisquer. Se $\beta > \alpha$, então $\operatorname{sen} \alpha > \operatorname{cos} \beta$? Justifique sua resposta.

Atividade 11: Sejam α e β dois ângulos quaisquer. Se $\beta > \alpha$, então $\operatorname{cos} \beta > \operatorname{sen} \alpha$? Justifique sua resposta.

Apresentação no Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/yt57z2Tn>

O círculo trigonométrico

O **Círculo Trigonométrico**, também chamado de Ciclo ou Circunferência Trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas.



Podemos estudar tanto seno, cosseno, tangente e etc.

De acordo com a simetria do círculo trigonométrico temos que o eixo vertical corresponde ao seno e o eixo horizontal ao cosseno. Cada ponto dele está associado aos valores dos ângulos.

1º Quadrante: arcos entre 0° e 90° , medidos a partir da origem.

2º Quadrante: arcos entre 90° e 180° , medidos a partir da origem.

3º Quadrante: arcos entre 180° e 270° , medidos a partir da origem.

4º Quadrante: arcos entre 270° e 360° , medidos a partir da origem.

1º Quadrante: seno positivo, cosseno positivos.

2º Quadrante: seno positivo, cosseno negativo.

3º Quadrante: seno negativo, cosseno negativo.

4º Quadrante: seno negativo, cosseno positivos.

Ângulos Notáveis

No círculo trigonométrico podemos representar as razões trigonométricas de um ângulo qualquer da circunferência.

Chamamos de ângulos notáveis aqueles mais conhecidos (30° , 45° e 60°). As razões trigonométricas mais importantes são seno, cosseno e tangente:

Relações trigonométricas			

Atividade 12: Porque eles são notáveis?

O círculo trigonométrico às vezes é estudado com raio igual a 1, isso favorece no momento que fazemos os cálculos pois a hipotenusa será igual a 1 e os valores de seno e cossenos serão projeções nos eixos. Vejamos os exemplos: <https://www.geogebra.org/m/JbwTeQ7T>

Atividade 13: Até o momento trabalhamos com a unidade de medida graus $^\circ$, qual a outra medida que usamos, assinale a(s) unidade de medida que usualmente utilizamos?

- a) Graus Celsius
- b) Kelvin
- c) Radianos
- d) Kg

Radianos do Círculo Trigonométrico

A medida de um arco no círculo trigonométrico pode ser dada em grau ($^\circ$) ou radiano (rad).

- 1 corresponde a $1/360$ da circunferência. A circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas ao centro, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1° .
- 1 radiano corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido.

Sabendo que a circunferência tem raio igual a 1 qual é o perímetro da circunferência??

$$2\pi$$

Perguntar o que acontece quando o a bolinha do Gráfico anda mais de 2π .

Link: <https://www.geogebra.org/m/yt57z2Tn>

Atividade 14: Sabendo que $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ faça a conversão para os demais ângulos notáveis.

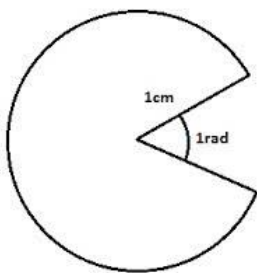
Exercícios

1. Determine os sinais seno cosseno tangente.
 - a) 361°
 - b) 1760°
 - c) 4853°
 - d) 3780°

2. Realize as convenções de radianos para graus e reduza para o menor cômruo.
 - a) 2π
 - b) $13,25\pi$
 - c) $9,5\pi$
 - d) 18π
 - e) $8,45\pi$

3. Realize as convenções de graus para radiano e reduza para o menor cômruo.
 - a) 361°
 - b) 1760°
 - c) 4853°
 - d) 3780°

4. (Vunesp-SP) Em um jogo eletrônico o “monstro” tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura.



A parte que falta no círculo é a boca do “monstro”, e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro “do monstro”, em cm, é:

5. Assinale a correspondente, O valor de $\sin 70^\circ$ é:

- a) $\sin 20^\circ$
- b) $\tan 20^\circ$
- c) $-\sin 20^\circ$
- d) $-\cos 20^\circ$
- e) $\cos 20^\circ$

6. (PUC-MG) Os moradores de certa cidade costumam fazer caminhada em torno de duas de suas praças. A pista que contorna uma dessas praças é um quadrado de lado L e tem 640 m de extensão; a pista que contorna a outra praça é um círculo de raio R e tem 628 m de extensão. Nessas condições, o valor da razão R/L é aproximadamente igual a:

Use $\pi = 3,14$.

7. (UF.Pelotas-RS) Nossa época, marcada pela luz elétrica, por estabelecimentos comerciais abertos 24 horas e prazos apertados de trabalho, que muitas vezes exigem o sacrifício dos períodos de sono, pode muito bem ser considerada a era do bocejo. Estamos dormindo menos. A ciência mostra que isso contribui para a ocorrência de males como diabetes, depressão e obesidade. Por exemplo, quem não segue a recomendação de dormir no mínimo de 8 horas por noite, tem 73% mais risco de se tornar obeso. (Revista Saúde, n.º 274, junho de 2006 - adaptado).

Uma pessoa que durma à zero hora e siga a recomendação do texto apresentado, quanto ao número mínimo de horas diárias de sono, acordará às 8 horas da manhã. O ponteiro das horas, que mede 6 cm de comprimento, do despertador dessa pessoa, terá descrito, durante seu período de sono, um arco de circunferência com comprimento igual a:

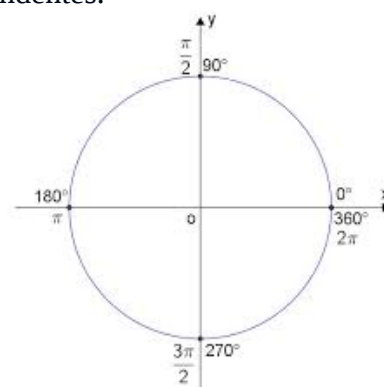
Use $\pi = 3,14$.

8. (UFRS) Os ponteiros de um relógio marcam duas horas e vinte minutos. O menor ângulo entre os ponteiros é:

9. (UF-GO) Por volta de 250 a.C., o matemático grego Erastóstenes, reconhecendo que a Terra era esférica, calculou sua circunferência. Considerando que as cidades egípcias de Alexandria e Syena se localizavam em um mesmo meridiano, Erastóstenes mostrou que a circunferência da Terra media 50 vezes o arco de circunferência do meridiano ligando essas duas cidades. Sabendo que esse arco entre as cidades media 5000 estádios (unidade de medida utilizada na época), Erastóstenes obteve o comprimento da circunferência da Terra em estádios, o que corresponde a 39 375 km no sistema métrico atual. De acordo com estas informações, a medida em metros, de um estádio era:

10. Qual é o ângulo, em graus, entre os ponteiros de um relógio analógico se ele marca 10h10'?

11. Coloque no círculo os ângulos notáveis e seus correspondentes.



Referências bibliográficas

MELILLO, K. M. **Investigações Matemáticas e Trigonometria**: Uma abordagem para o 1º Ano do Ensino Médio. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~pgmat/monografias/Mono011.pdf>>. Acesso em: 25 jul. 2018.

O CÍRCULO Trigonométrico. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/mundo_trigonometria/teoria/circulo.html>. Acesso em: 25 jul. 2018.

Neste dia realizamos nossa terceira aula do Promat abordando o conteúdo de círculo trigonométrico, apresentando aos estudantes o encaminhamento da aula e, em seguida, distribuimos os materiais que foram utilizados nas construções conceituais deste encontro.

Realizamos no quadro uma simulação dos procedimentos que os estudantes poderiam seguir, porém notamos que tinham dificuldades como: não conheciam o transferidor e dificuldades com a interpretação de desenhos. Para que pudessemos progredir nas construções conceituais, realizamos uma nova explicação no quadro, com mais detalhes.

Nesta situação, compreendemos que os educandos progrediam aos poucos e, esperávamos que pudessem acompanhar os passos para concluir a construção conceitual com êxito. Devido à tal dedicação sobre os conceitos explicados em classe, após o intervalo iniciamos as atividades do material. Os alunos dispunham de tempo para responder os exercícios particularmente e, seguidamente, para compartilhar suas respostas.

Durante a resolução no quadro, notamos divergências entre os valores das medições nas diferentes construções e, então, com as respostas dos alunos, realizamos uma média e construímos a tabela da atividade 2: com isso conseguimos estabelecer uma aproximação dos valores de seno e cosseno tabelados e os reais.

A aula se estendeu até a resolução da atividade 11, sendo que o restante dos exercícios foi realocado para a aula seguinte. Neste encontro, percebemos que os estudantes estavam pouco participativos e somente alguns se pronunciavam para compartilhar os resultados.

A continuação da aula ocorreu no dia 25 de agosto, onde retomamos os exercícios da aula anterior, definindo o círculo trigonométrico, e registrando no quadro os exemplos. Também mostramos projeções das construções no *Geogebra* e, os alunos disseram estar empolgados com a interação com o *software*. Os alunos não mostraram muitas dificuldades ao resolverem as atividades.

Plano de aula IV - Relações trigonométricas

Professores

Johnaton, Luiz, Lucas e Vinícius.

Público-alvo

Estudantes inscritos no PROMAT.

Tempo de execução

Um encontro com duração de 4 horas/aula.

Objetivo geral

- Promover a integração e compartilhamento de conhecimento entre os alunos;
- Transmitir aos alunos conhecimento a respeito de relações trigonométricas;
- Estabelecer relações entre tais conceitos e o cotidiano dos alunos.

Objetivos específicos

- Compreender os conceitos das relações trigonométricas secante, cossecante e cotangente;
- Tornar o aluno apto a utilizar a relação fundamental trigonométrica no auxílio para resolução de situações - problema;
- Utilizar a soma e diferença de arcos para calcular seno, cosseno ou tangente de arcos não notáveis.

Conteúdo:

Relações trigonométricas: secante, cossecante e cotangente; Relação fundamental trigonométrica; Soma e diferença de arcos.

Recursos didáticos

Quadro, giz e Geogebra.

Avaliação

Os estudantes serão avaliados de forma diagnóstica e continuada quanto à participação durante as discussões sobre o conteúdo, considerando a assimilação do conteúdo trabalhado e as dificuldades apresentadas pelos alunos durante o processo de elaboração das atividades propostas.

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos a aula retomando as atividades do encontro anterior, revendo os conceitos sobre ciclo trigonométrico. Após a realização das atividades, apresentaremos aos alunos a relação fundamental trigonométrica: $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$. Utilizaremos o ciclo trigonométrico, que será construído no quadro, escolhendo um ângulo qualquer, de valor genérico, e através de um triângulo retângulo e do teorema de Pitágoras mostraremos que a relação é sempre válida, não importando o valor do ângulo. Mostraremos a mesma construção com ângulos escolhidos em cada um dos quatro quadrantes do ciclo trigonométrico.

Após a construção, daremos exercícios aos alunos para resolverem em sala de aula.

LISTA DE EXERCÍCIOS

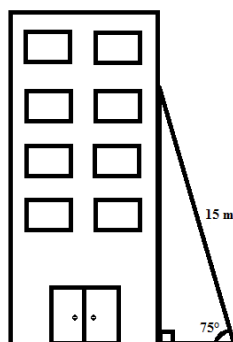
Exercício 1: Se $\cos \beta = 1/4$ e β pertence ao 4º quadrante, determine o valor de $\text{sen } \beta$:

Exercício 2: Se $\cos x = -12/13$ e $\pi < x < 3\pi/2$, então $\text{sen } x$ é igual a:

Exercício 3: Se $\text{sen } (x) = 1/3$ e $\pi/2 < x < \pi$, então o valor de $\cos (x)$ é:

O último momento da aula será para abordarmos sobre a soma e a diferença de arcos das relações seno, cosseno e tangente. Para abordarmos esse conteúdo, entregaremos aos alunos um exercício que envolverá um triângulo retângulo conforme o seguinte:

ATIVIDADE: Durante um incêndio em um prédio, os bombeiros precisavam chegar ao terceiro andar para resgatar alguns moradores que não haviam conseguido escapar. Então, utilizaram uma escada de 10 metros de comprimento para alcançarem o andar desejado. Ao posicionarem a escada, percebeu-se que o ângulo formado entre a escada e o solo era de 75° , conforme o esquema abaixo:



Posicionando a escada dessa maneira, que altura os bombeiros conseguiram atingir?

Espera-se que os alunos tentem utilizar os conceitos já estudados nos encontros anteriores, mas que não consigam avançar, pois não sabem como encontrar o valor do $\sin 75^\circ$. Então, instigaremos os alunos para que pensem se é possível encontrar o $\sin 75^\circ$ a partir dos valores que eles já conhecem (30° e 45°). Espera-se que eles apenas somem os valores do $\sin 30^\circ$ e $\sin 45^\circ$, e assim tentem concluir a atividade. Então, mostraremos a eles que essa maneira é equivocada, mostrando tanto o exemplo de $\sin (30^\circ + 30^\circ)$, que é diferente de $\sin 60^\circ$, quanto pelo fato de que somar os valores de $\sin 30^\circ$ e $\sin 45^\circ$ resultaria em um valor maior do que 1, o que é impossível para o seno de um ângulo.

A partir daí, apresentaremos aos alunos a maneira correta de se calcular o $\sin 75^\circ$, assim como para qualquer outro ângulo e para as outras razões trigonométricas, usando a soma de arcos.

$$\bullet \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\bullet \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$\bullet \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\bullet \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Após a explicação, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios abordando o conteúdo.

LISTA 2

Exercício 1: Se $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, para dois arcos a e b , então qual o seno de $2a$?

- a) $\sin a \cos a$.
- b) $2 \sin a \cos a$.
- c) $\sin a \cos a / 2$.
- d) $\sin a + \cos a$.
- e) $\sin a - \cos a$.

Exercício 2: Sejam dois ângulos a e b , tais que $\sin a = 3/5$, $\cos a = 4/5$, $\sin b = 5/13$ e $\cos b = 12/13$. Quanto vale $\sin(a + b)$?

- a) $56/65$
- b) $57/65$
- c) $58/65$
- d) $59/65$
- e) $61/65$

Exercício 3: Qual é o valor de $\sin 15^\circ$?

- a) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$.
- b) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$.
- c) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$.
- d) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$.
- e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})/4$.

Exercício 4: Quanto vale $\cos 15^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ$?

- a) $-1/2$.
- b) $1/2$.
- c) $-\sqrt{3}/2$.
- d) $\sqrt{3}/2$.
- e) $\sqrt{2}/2$.

Exercício 5: Se $\operatorname{tg} a = 2$, então $\operatorname{tg}(2a)$ é:

- a) $4/3$.
- b) $3/4$.
- c) $-3/4$.
- d) $-4/3$.
- e) $2/5$.

Exercício 6: Calcule $\cos(\pi/12)$ e $\operatorname{tg}(\pi/12)$:

Exercício 7: Determine $\cos 105^\circ$:

Exercício 8: O valor de $\cos 735^\circ$ é:

- a) $1/4$.
- b) $\sqrt{3}/4$.
- c) $\sqrt{2} + \sqrt{6}/4$.
- d) $\sqrt{2} - \sqrt{6}/4$.

REFERÊNCIAS

TRIGONOMETRIA. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=71#>>. Acesso em: 15 jul. 2018.

FÓRMULAS de adição de arcos. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/formulas-adicao-arcos.htm>>. Acesso em: 15 jul. 2018.

Conforme previsto no plano de aula, iniciamos a aula retomando o conteúdo visto na aula anterior, que tratava sobre o círculo trigonométrico, para que conseguíssemos concluir a explicação. Enquanto nós professores estagiários lembrávamos o que havia sido lecionado no encontro anterior, apenas alguns alunos acompanhavam e respondiam as perguntas feitas, ao passo que a maioria da turma ficava em silêncio, observando.

Após o breve resumo, prosseguimos conforme o plano, explicando aos alunos sobre as características do ciclo trigonométrico, que possui centro na origem do plano cartesiano e raio unitário. Nesta situação, apenas uma aluna afirmou já saber sobre o conceito que estava sendo explicado.

Assim, após mostrar as características, seguimos a aula ensinando aos alunos sobre a possibilidade de encontrar o valor do seno e cosseno dos ângulos através dos eixos y e x , respectivamente.

Logo que esses conceitos foram trabalhados, pudemos prosseguir com a aula no que tange as atividades 10 a 14, conforme previsto no plano. A turma demonstrou-se mais uma vez apática e com certa dificuldade para assimilar os novos conceitos, o que resultou na utilização de um tempo maior do que previsto até esse momento. Por isso, trabalhamos as atividades de maneira resumida, já que restavam apenas 50 minutos até o horário do intervalo, que era o limite de tempo para a realização dessas atividades e dos exercícios propostos.

Ainda antes de deixarmos os alunos fazerem as atividades, foi explicado de maneira breve como transformar ângulos medidos em graus para π radianos e vice-versa, utilizando regra de três simples para tal. Os alunos, em geral, demonstraram boa assimilação dos conteúdos, e em seguida partimos aos exercícios de sala, até o intervalo.

Na volta no intervalo, prosseguimos conforme o plano para a explicação sobre seno, cosseno e tangente da soma ou subtração de arcos. Partimos de um problema em que era necessário conhecer-se o seno de 75° para instigar os alunos a pensarem em maneiras de descobrir o valor desejado. Um dos alunos perguntou se deveríamos somar o seno de 45° com o seno de 30° , e respondemos mostrando que esse tipo de igualdade não era válido, já que a soma proposta resultaria num número maior do que 1, o que é impossível para o valor do seno de um ângulo. Também aproveitamos para falar sobre como o seno de 60° é diferente da soma de seno de 30° com seno de 30° , já que os alunos já haviam estudado os arcos notáveis.

Como a aula estava perto do fim e muitos alunos saíram mais cedo, além de o objetivo principal ser deixar os alunos fazerem vários exercícios, apresentamos todas as fórmulas de soma e subtração de arcos e então os alunos iniciaram os exercícios de sala.

Plano de aula V – Plano cartesiano

Professores:

Johnaton, Luis, Lucas e Vinicius.

Público-Alvo:

Estudantes inscritos no PROMAT.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral

- Compreender os conceitos básicos da Geometria Analítica, relacionando-os com a realidade.

Objetivos Específicos

- Representar pares ordenados no plano cartesiano;
- Calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano;
- Determinar o ponto médio de um segmento no plano cartesiano;
- Entender a condição de alinhamento entre três pontos do plano cartesiano.

Conteúdo:

Coordenadas cartesianas no plano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento e pontos colineares.

Recursos Didáticos:

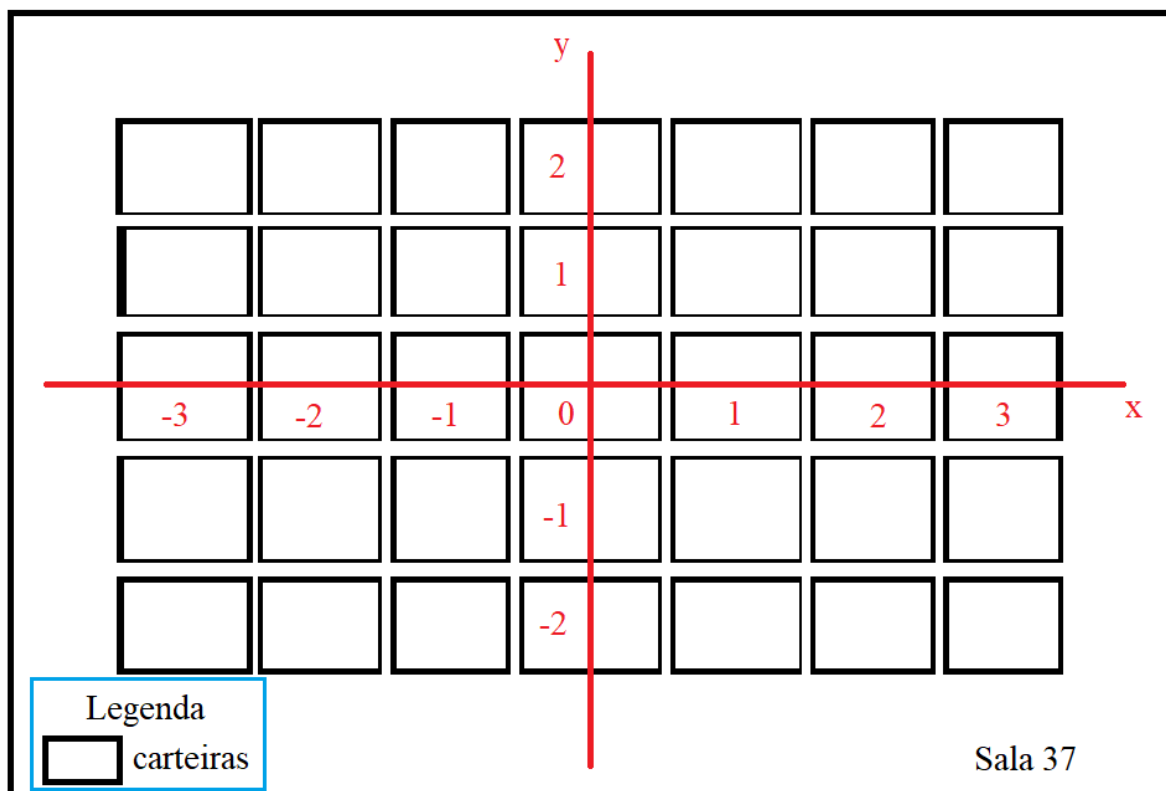
Quadro, giz, material do estudante impresso, projetor.

Avaliação:

Os estudantes serão avaliados de forma diagnóstica e continuada quanto à participação durante as discussões sobre o conteúdo, considerando a assimilação do conteúdo trabalhado e as dificuldades apresentadas pelos durante o processo de elaboração da atividade proposta.

Encaminhamento metodológico:

1 - Iniciaremos a aula fazendo uma dinâmica onde a sala de aula irá simular um plano cartesiano. Antecipadamente organizaremos a sala de modo que as carteiras estejam alinhadas horizontal e vertical. Assim marcaremos as carteiras dos eixos centrais (horizontal “X” e vertical “Y”) como mostra a figura abaixo.



Os estudantes podem sentar onde acharem conveniente, e logo após todos se acomodarem distribuiremos um cartão impresso com um par ordenado (aleatório) para todos os educandos.

Nesse momento teremos duas escolhas para seguir a aula:

α- Convidar um dos estudantes a iniciar sua apresentação, comentando seu nome, cidade de origem, qual curso pretende cursar após concluir o Ensino Médio entre outras informações que o mesmo achar relevante compartilhar com os demais. Em seguida o estudante que se apresentou se dirige a coordenada marcada em seu cartão (utilizando as

coordenadas do plano cartesiano simulado pelas carteiras), o educando que estará sentado na coordenada do cartão levanta e apresenta-se e então se dirige até coordenada marcada em seu cartão e assim sucessivamente até que todos se apresentem.

Obs: Caso o cartão de algum estudante o leve a uma carteira vazia, convidaremos um novo educando para que a dinâmica possa continuar.

β - Fazemos o mesmo processo da dinâmica α , porém sem as apresentações, levando em consideração somente a localização das coordenadas.

2 - Em seguida, vamos trabalhar a distância entre pontos. Para isso vamos levantar as seguintes situações problemas:

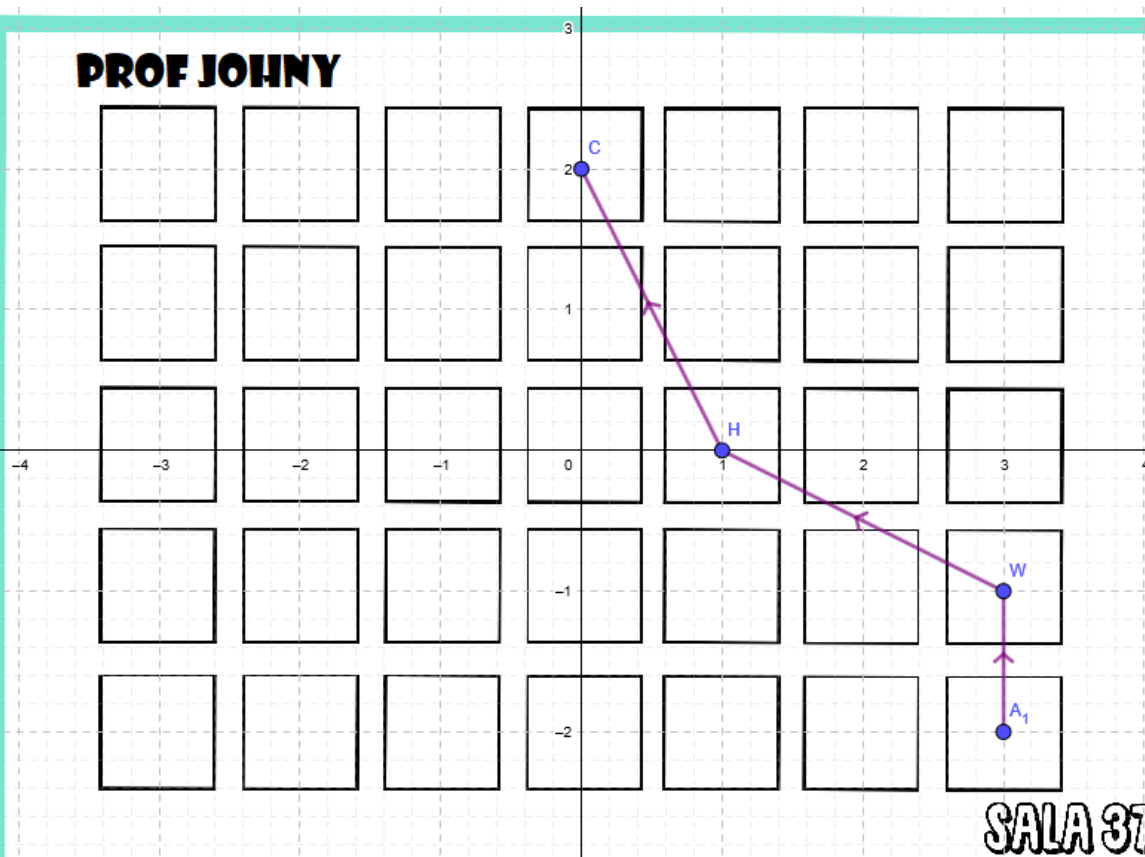
(1,0) - Qual a distância entre os estudantes localizados nas seguintes coordenadas:

- $(-1,2)$ e $(2,1)$
- $(-2,0)$ e $(1,0)$
- $(0,-3)$ e $(0,3)$
- $(2,2)$ e $(2,-3)$
- $(2,3)$ e $(-3,-2)$
- $(-1,-1)$ e $(1,2)$
- $(-2,2)$ e $(-1,-3)$
- $(2,-3)$ e $(0,3)$

Obs: Indagaremos os estudantes quando a posição em que esses pontos se encontram, e em como isso influencia o cálculo da distância entre eles.

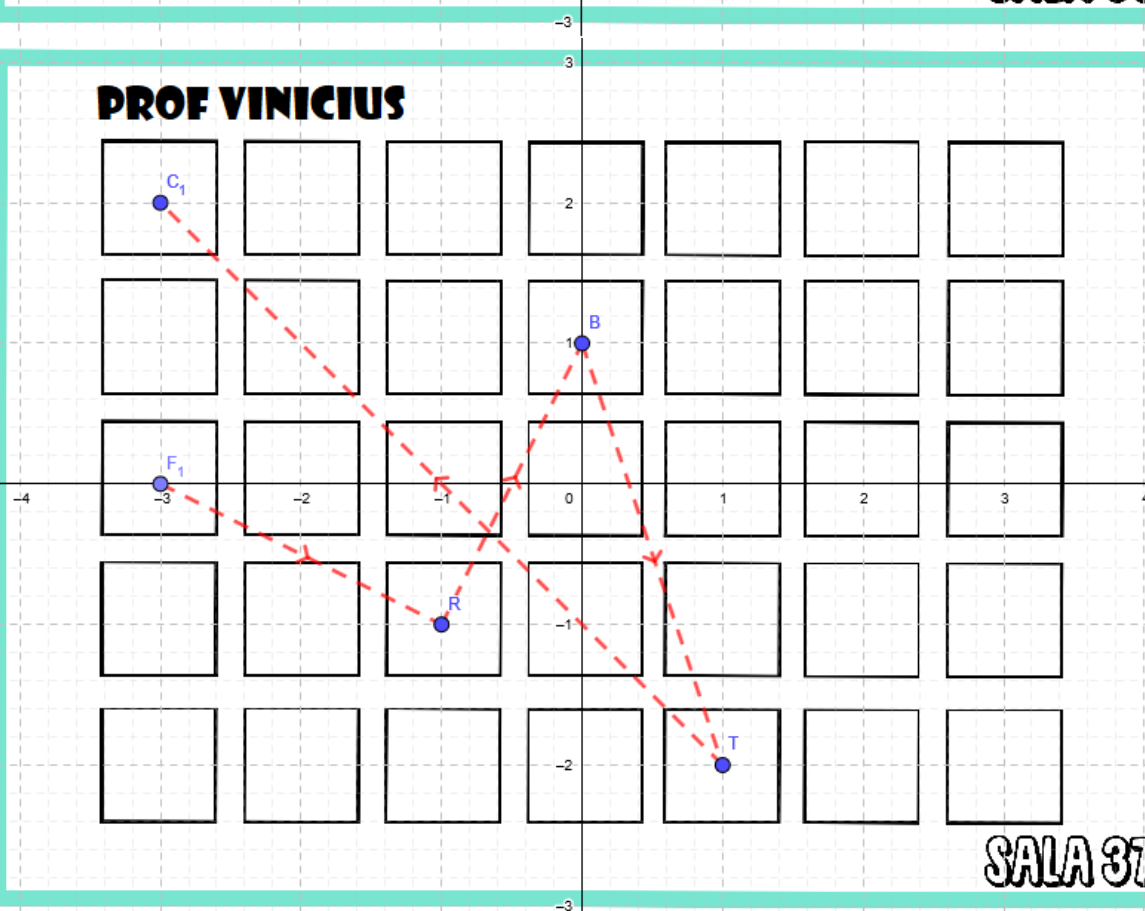
(2,0) - Os professores Johny e Vinicius passaram nas carteiras ajudando alguns estudantes, as figuras abaixo registraram seus deslocamentos. Analisando os deslocamentos qual é a diferença entre as distâncias percorridas pelos profs Johny e Vinicius?

PROF JOHNY



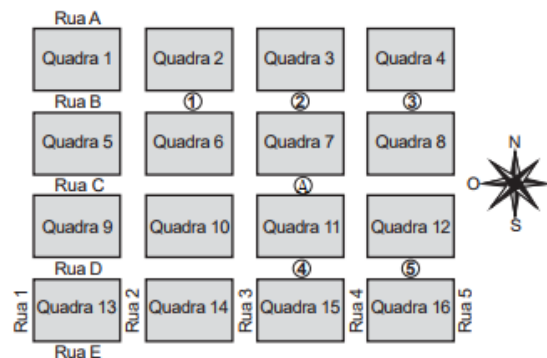
SALA 37

PROF VINICIUS



SALA 37

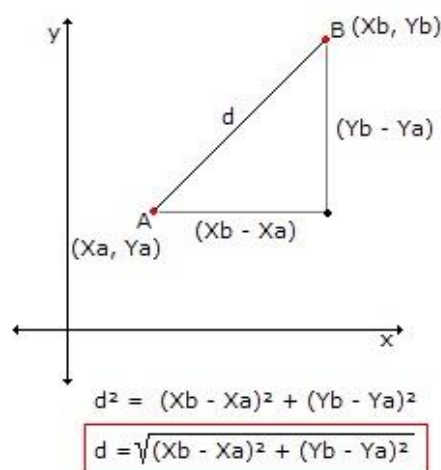
(3,0) - (Adaptado ENEM 2017): Um menino acaba de se mudar para um novo bairro e deseja ir à padaria. Pediu ajuda a um amigo que lhe forneceu um mapa com pontos numerados, que representam cinco locais de interesse, entre os quais está a padaria. Além disso, o amigo passou as seguintes instruções: a partir do ponto em que você se encontra, representado pela letra A, ande para oeste, vire à direita na primeira rua que encontrar, siga em frente e vire à esquerda na próxima rua. A padaria estará logo a seguir.



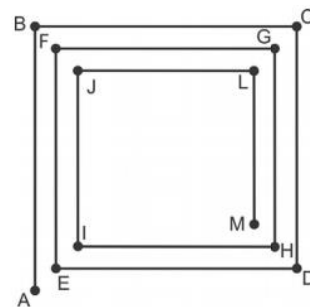
α - Em qual ponto numerado está a padaria?

β - Se considerarmos as coordenadas (x_A, y_A) para o ponto A e (x_B, y_B) para o ponto que representa a padaria, qual seria a distância d entre seu ponto de partida e a padaria?

Vamos indagar os estudantes durante as resoluções para que associem a distância entre dois pontos a hipotenusa de um triângulo retângulo, onde as medidas de seus catetos (são paralelos ao eixo das abscissas e ordenadas) são conhecidas, sendo possível a generalização entre pontos num plano cartesiano se dá pelo teorema de Pitágoras.



(4,0) - (ENEM 2011): Considere que o esquema represente uma trilha poligonal que Carlos deve percorrer, partindo do ponto A até chegar ao ponto M

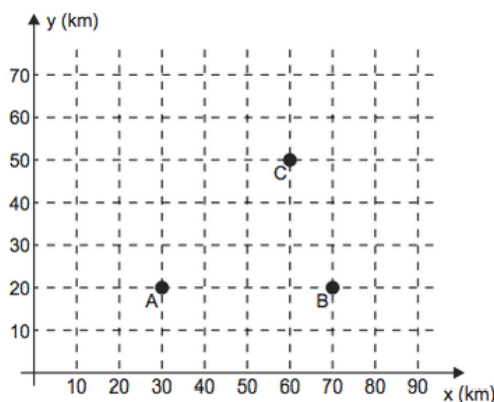


Sabendo que o segmento AB possui 11 m de comprimento e, a partir desse, o comprimento de cada segmento seguinte possui um metro a menos que o comprimento do segmento anterior, quantos metros Carlos terá caminhado ao percorrer toda a trilha?

(5,0) - Determinar o estudante equidistante da origem e dos estudantes $I = (2,0)$ e $C = (0,2)$

(6,0) - Sejam $M_1 = (3,0)$, $M_2 = (1,1)$ e $M_3 = (1,-1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo a partir das coordenadas dos pontos médios.

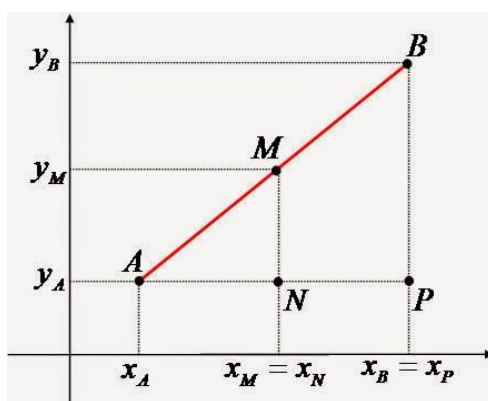
(7,0) - (ENEM 2013): Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. Qual o local adequado para a construção dessa torre?

Após os estudantes terem tentado resolver os problemas sobre ponto médio, partiremos das resoluções para a generalização e definição de ponto médio

Definição de Ponto Médio: Chama-se ponto médio de um segmento AB o ponto desse segmento que o divide em dois segmentos congruentes. Se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ são pontos distintos, então o ponto médio $M = (x_M, y_M)$ do segmento AB é tal que:



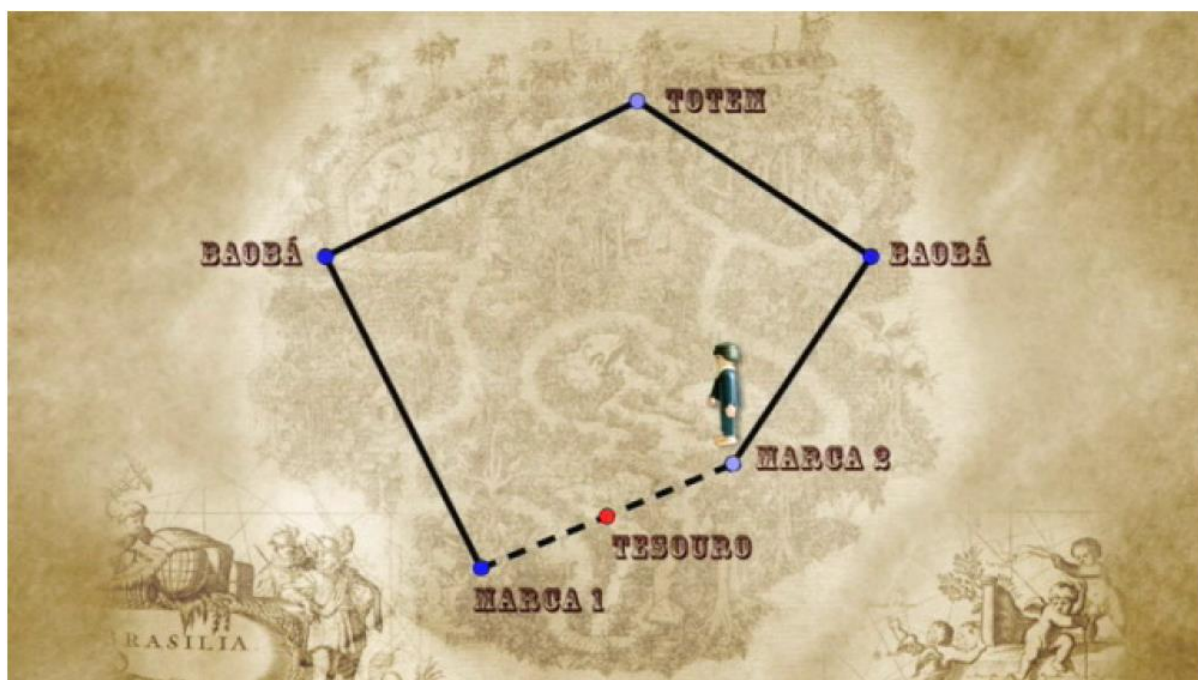
Assim temos a seguinte relação:

$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \text{ e } Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

Desafio: Um tesouro foi enterrado em uma ilha, e foi feito um mapa de sua localização. As instruções contidas no mapa dizem que, ao se desembarcar na ilha, são avistados, imediatamente, dois grandes baobás, árvores consideradas sagradas pelos povos da África, e um totem, símbolo e protetor de uma tribo local.



Para encontrar o tesouro deve-se partir do totem e caminhar até o baobá que está à direita dele, contando os passos. Chegando ao baobá, girar para a esquerda 90 graus e caminhar o mesmo número de passos contados. No ponto aonde chegar, fazer uma marca. Voltar novamente ao totem e caminhar até o baobá que está à esquerda, contando novamente os passos. Girar à direita 90 graus, caminhar o número de passos contados dessa segunda vez, e fazer a marca no ponto de chegada. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância de cada uma delas.



Depois de algum tempo, exploradores encontraram o mapa e decidiram ir à ilha resgatar o tesouro. Ao chegarem à ilha tiveram uma surpresa desagradável. Os baobás ainda estavam lá, mas o totem tinha desaparecido. Os exploradores não desanimaram e, depois de pensar um pouco, tiveram uma ótima ideia para resolver o problema de modo bastante prático.

O desafio consiste em descobrir como os exploradores fizeram para encontrar o lugar onde o tesouro estava enterrado e recuperá-lo mesmo sem o totem.

Referências

DESAFIO. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1183>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

PONTO médio. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=41>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

QUESTÕES Enem. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2013/segundo-dia/nos-ultimos-anos-televisao-tem-passado-por-uma-verdadeira-revolucao-em-termos-de-qualidade/>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

QUESTÕES Enem. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2017/segundo-dia/um-menino-acaba-de-se-mudar-para-um-novo-bairro-e-deseja-ir-padaria-pe-diu-ajuda-um-amigo-que/>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

No decorrer das aulas anteriores tivemos o mínimo de interação dos estudantes durante as explicações dos conceitos. Refletindo sobre isso e compartilhando esse fato com nossa supervisora, decidimos utilizar uma abordagem metodológica diferente da que vínhamos utilizando em nossas aulas.

Nesse sentido, iniciamos o conteúdo de Geometria Analítica com uma dinâmica que consistiu em modificar a disposição dos estudantes ao entrar na sala, sendo assim ao entrar na sala de aula, foram distribuídas coordenadas cartesianas para cada educando, após todos estarem presentes iniciamos as explicações da atividade.

Destarte, as carteiras da sala formavam o plano cartesiano e, assim, um estudante de cada vez deveria localizar a carteira conforme descrito em sua coordenada – recebida no início da aula –, se acomodar e assim por diante. No entanto, a interação com os colegas e a compreensão sobre as coordenadas não ocorreram como pensávamos: os estudantes que não conseguiam se localizar, demonstravam medo de perguntar.

Após a dinâmica, iniciamos as explicações acerca dos conceitos de distância entre pontos e solicitamos que os estudantes resolvessem as situações propostas no material do estudante. Enquanto os estudantes resolviam as atividades, nós, professores estagiários, passávamos entre as fileiras para tirar dúvidas dos estudantes, mediando as atividades conforme necessário.

Nessa aula, mesmo com a pouca interação dos estudantes em relação a dinâmica, os estudantes conseguiram completar todas as atividades propostas e compartilharam os resultados ao final da aula.

Plano de aula VI – Retas

Professores:

Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius.

Público-Alvo:

Estudantes inscritos no PROMAT.

Tempo de execução:

4h/a.

Objetivo Geral

- Compreender alguns conceitos da geometria Analítica.

Objetivos Específicos

- compreender e resolver alguns exercícios de equação da reta;
- compreender e resolver alguns exercícios de coeficiente angular e linear.

Conteúdo:

Retas

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, material do estudante impresso, projetor.

Avaliação:

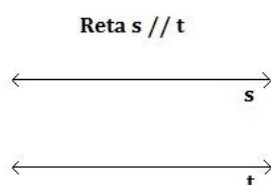
Os estudantes serão avaliados de forma diagnóstica e continuada quanto à participação durante as discussões sobre o conteúdo, considerando a assimilação do conteúdo trabalhado e as dificuldades apresentadas pelos alunos durante o processo de resolução das atividades propostas.

Encaminhamento metodológico

Começaremos falando sobre os tipos de retas, em seguida, definiremos a equação da reta, projetando o plano de aula e juntamente com os alunos, faremos os exemplos, deixando as atividades para a resolução dos alunos.

Tipos de Retas

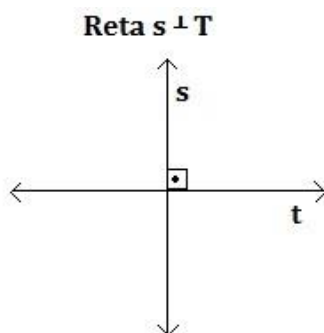
Retas Paralelas: não existe ponto em comum entre as retas, ou seja, elas estão posicionadas uma ao lado da outra e sempre no mesmo sentido (vertical, horizontal ou inclinada).



As retas t e s são paralelas se, e somente se, possuírem a mesma inclinação ou seus coeficientes angulares forem iguais.

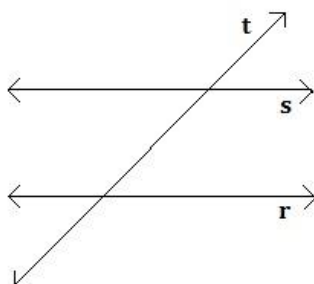
Utilizando a linguagem matemática: $s \parallel t \iff a_1 = a_2$

Retas Perpendiculares: possuem um ponto em comum, o qual forma um ângulo reto (90°).



Retas Transversais: retas que são transversais às outras retas. É definida como uma reta que possui interseção com as outras retas em pontos diferentes.

Reta t é transversal as retas s e r



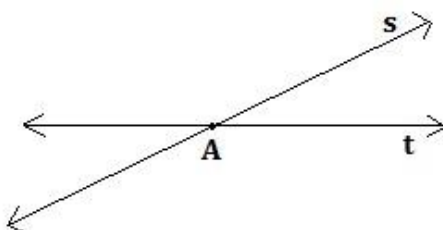
Retas Coincidentes: diferente das retas perpendiculares, as retas coincidentes possuem todos os pontos em comum.

reta r = reta s ($r=s$)



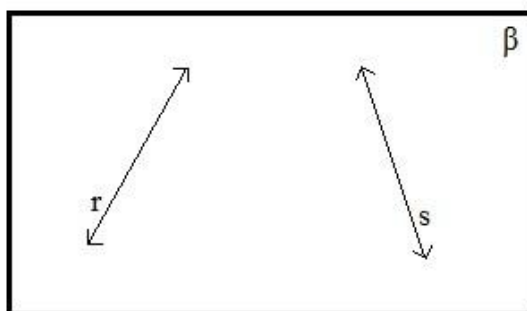
Retas Concorrentes: são duas retas que se encontram em determinado ponto (vértice). No entanto, diferente das retas perpendiculares, elas se cruzam e formam entre si ângulos de 180° , chamados de ângulos suplementares.

reta s é concorrente à reta t



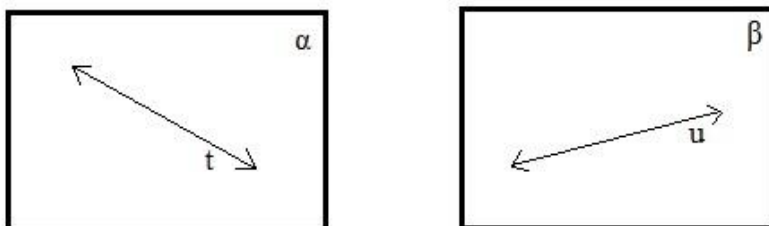
Retas Coplanares: são retas que estão presentes no mesmo plano no espaço. Na figura abaixo ambas pertencem ao plano β .

r e s são retas coplanares



Retas Reversas: diferente das retas coplanares, esse tipo de reta está presente em planos distintos.

as retas t e u são retas reversas



A equação da reta

A equação da reta pode ser determinada representando-a no plano cartesiano (x,y). Conhecendo as coordenadas de dois pontos distintos pertencentes a reta podemos determinar sua equação.

Também é possível definir uma equação da reta a partir de sua inclinação e das coordenadas de um ponto que lhe pertença.

Equação geral da reta

Dois pontos definem uma reta. Desta forma, podemos encontrar a equação geral da reta fazendo o alinhamento de dois pontos com um ponto (x,y) genérico da reta.

Sejam os pontos A(x_a,y_a) e B(x_b,y_b), não coincidentes e pertencentes ao plano cartesiano.

Três pontos estão alinhados quando o determinante da matriz associada a esses pontos é igual a zero. Assim devemos calcular o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante encontramos a seguinte equação:

$$(y_a - y_b)x + (x_a - x_b)y + x_a y_b - x_b y_a = 0$$

Vamos chamar:

$$a = (y_a - y_b)$$

$$b = (x_a - x_b)$$

$$c = x_a y_b - x_b y_a$$

A equação geral da reta é definida como:

$$ax + by + c = 0$$

Onde **a**, **b** e **c** são constantes e **a** e **b** não podem ser simultaneamente nulos.

Exemplo

Encontre uma equação geral da reta que passa pelos pontos A(-1, 8) e B(-5, -1).

Primeiro devemos escrever a condição de alinhamento de três pontos, definindo o matriz associada aos pontos dados e a um ponto genérico P(x,y) pertencente a reta.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

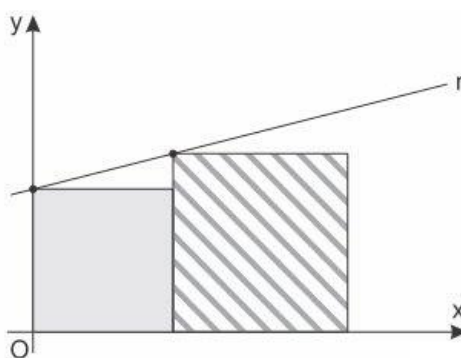
Desenvolvendo o determinante, encontramos:

$$(8+1)x + (1-5)y + 40 + 1 = 0$$

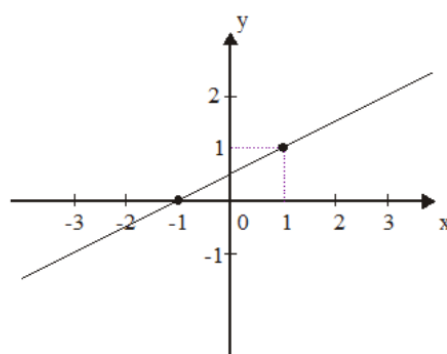
A equação geral da reta que passa pelos pontos A(-1,8) e B(-5,-1) é:

$$9x - 4y + 41 = 0$$

Atividade 1: Na figura abaixo estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:



Atividade 2: Determine a equação da reta cujo gráfico está representado no plano cartesiano abaixo.

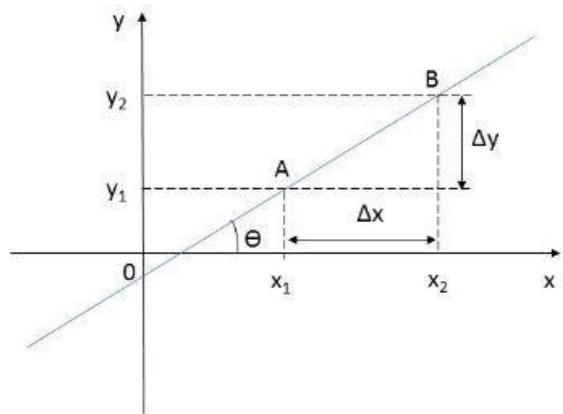


Coefficiente angular: Podemos encontrar uma equação da reta r conhecendo a sua inclinação (direção), ou seja o valor do ângulo θ que a reta apresenta em relação ao eixo x .

Para isso associamos um número m , que é chamado de coeficiente angular da reta, tal que:

$$m = \operatorname{tg} \theta$$

O coeficiente angular m também pode ser encontrado conhecendo-se dois pontos pertencentes a reta.



Como $m = \operatorname{tg} \theta$, então:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo

Determine o coeficiente angular da reta r , que passa pelos pontos $A(1,4)$ e $B(2,3)$.

Sendo,

$$x_1 = 1 \text{ e } y_1 = 4$$

$$x_2 = 2 \text{ e } y_2 = 3$$

$$m = \frac{3 - 4}{2 - 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Conhecendo o coeficiente angular da reta m e um ponto $P_0(x_0, y_0)$ pertencente a ela, podemos definir sua equação.

Para isso vamos substituir na fórmula do coeficiente angular o ponto conhecido P_0 e um ponto $P(x, y)$ genérico, também pertencente a reta:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Exemplo: Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $A(2,4)$ e tem coeficiente angular 3.

Para encontrar a equação da reta basta substituir os valores dados:

$$y - 4 = 3(x - 2)$$

$$y - 4 = 3x - 6$$

$$-3x + y + 2 = 0$$

Atividade 3: Calcule o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos:

A (-1, 3) e B (-4, -3)

C (3, 2) e D (-3, -1)

E (2, -3) e F (-4, 3)

Atividade 4: Dada a reta que tem a equação $2x + 4y = 9$, determine seu coeficiente angular.

Coeficiente linear: O coeficiente linear **n** da reta **r** é definido como o ponto em que a reta intercepta o eixo y, ou seja o ponto de coordenadas P(0,n).

Utilizando esse ponto, temos:

$$y - n = m(x - 0)$$

$$y = mx + n$$

(Equação reduzida da reta).

Exemplo: Sabendo que a equação da reta r é dada por $y = x + 5$, identifique seu coeficiente angular, sua inclinação e o ponto em que a reta intercepta o eixo y.

Como temos a equação reduzida da reta, então:

$$m = 1$$

$$\text{Sendo } m = \text{tg } \theta \Rightarrow \text{tg } \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

O ponto de interseção da reta com o eixo y é o ponto P(0,n), sendo n=5, então o ponto será

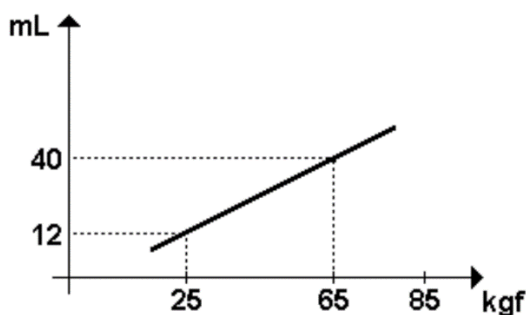
P(0,5)

Atividade 5: A equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(0, 1) e B(6, 8) é dada por:
(determine o coeficiente angular e linear)

Atividade 6: A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos A(1, 5) e B(4, 14) é:

Atividade 7: A reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB com $A=(0,3)$ e $B=(5,0)$ tem qual coeficiente angular?

Atividade 8: Na figura a seguir, tem-se o gráfico de uma reta que representa a quantidade, medida em mL, de um medicamento que uma pessoa deve tomar em função de seu peso, dado em kgf, para tratamento de determinada infecção. O medicamento deverá ser aplicado em seis doses.

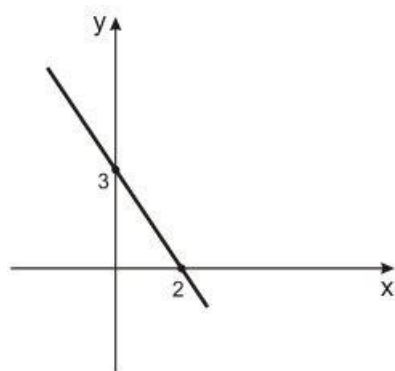


Assim, uma pessoa que pesa 85kgf receberá em cada dose:

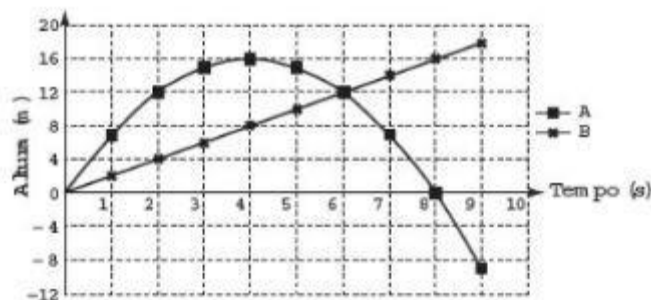
Atividade 9: A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos $A(1, 5)$ e $B(4, 14)$ é:

Atividade 10: equação da reta, representada no gráfico abaixo, é:

- a) $y = \frac{3}{2}x + 3$
- b) $y = -\frac{3}{2}x + 3$
- c) $y = \frac{2}{3}x + 3$
- d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$



Atividade 11: Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá:

- a) diminuir em 2 unidades.
- b) diminuir em 4 unidades.
- c) aumentar em 2 unidades.
- d) aumentar em 4 unidades.
- e) aumentar em 8 unidades.

Atividade 12: Os segmentos de reta são as únicas figuras geométricas sobre as quais é possível calcular distância. Assim, é possível definir a distância entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ como:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Qual a distância entre os pontos C e D cujas coordenadas são $C(2, 5)$ e $D(10, 15)$?

Atividade 13: Dadas as retas r e s, determinadas respectivamente pelas equações $2x + y = 3$ e $3x - 4y = -23$, é correto afirmar que r e s são retas:

- a) concorrentes
- b) iguais
- c) paralelas
- d) perpendiculares

REFERÊNCIAS

EQUAÇÃO da reta. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/equacao-da-reta/>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

EXERCÍCIOS Geometria Analítica. Disponível em: <<https://blogdoenem.com.br/geometria-analitica-matematica-enem>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

EXERCÍCIOS coeficiente angular e linear. Disponível em :<<http://cedt-matematica.blogspot.com/2013/03/3-ano-lista-coeficiente-angular-e.html>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

EXERCÍCIOS de equações da reta. Disponível em:<<https://www.infoescola.com/geometria-analitica/equacoes-da-reta/exercicios/>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

Iniciamos a nossa sexta aula com uma revisão dos conteúdos trabalhados no encontro anterior, para que pudéssemos ter êxito neste encontro: era essencial que os estudantes compreendessem os conceitos expostos na última aula, que tratava de pontos e plano cartesiano.

Após a revisão, explanamos sobre os tipos de retas, sejam paralelas, perpendiculares, transversais, coincidentes, concorrentes e coplanares. A todo o momento, indagávamos aos estudantes sobre o conteúdo e suas respectivas dúvidas: muitos alunos disseram conhecer as retas trabalhadas.

Prosseguindo com a aula, apresentamos a equação geral da reta, através de exemplos por meio do conteúdo de matriz determinante, para assim, através de dois pontos chegar à forma da equação geral da reta. Posterior à explicação, aplicamos a primeira atividade.

Com algumas coordenadas em um plano cartesiano, sendo que primeiro, eles deveriam determinar o lado dos quadrados para que determinassem a posição da coordenada no plano. Observamos que a maior dificuldade foi determinar a aresta da figura: alguns alunos tiveram um pouco de dificuldade em montar a matriz. A segunda atividade os estudantes resolveram sem problemas, pois as coordenadas estavam expostas e, deveriam resolver a matriz determinante e, assim, montar a equação geral da reta.

Prosseguindo com a aula, falamos sobre a existência dos coeficientes angulares e lineares e, para facilitar a compreensão, resolvemos alguns exercícios em forma de exemplo. Poucos alunos participavam da aula e não respondiam as nossas perguntas, com exceção de três alunos que, às vezes, respondiam.

Continuamos a aula com a atividade três: os alunos deveriam calcular o coeficiente angular. Tal exercício foi proposto com intenção avaliativa diagnóstica sobre nossas próprias explicações, como professores estagiários. Assim, percebemos que certos estudantes dispunham de bastante dificuldade, por isso estávamos sempre por perto para explicar cada atividade e tirar as possíveis dúvidas que poderiam ter.

Trabalhamos com atividades repetitivas com a finalidade de fazê-los entender a construção da equação geral e reduzida da reta, como também de que compreendessem a importância do coeficiente angular e do linear. Depois, propusemos questões do Enem e vestibulares. Ademais, houve uma aluna que interpretou a questão de outra forma, utilizando o conhecimento que ela possuía sobre razão e proporção, conseguindo chegar ao mesmo resultado dos demais alunos, que fizeram pelo método que nós ensinamos nesta aula.

Não conseguimos trabalhar com todas as atividades que tínhamos planejado, por isso as que ficaram sem resolver, pedimos para que eles fizessem em casa, para que na próxima aula realizássemos revisão e tirássemos possíveis dúvidas que eles tivessem.

Plano de aula VII – Circunferência

Público-Alvo:

Alunos inscritos no projeto PROMAT

Tempo de execução:

4 horas aulas

Objetivo Geral:

- Compreender o conceito e a construção de circunferência
- Compreender a posição de uma reta em relação a uma circunferência
- Determinar a posição de um ponto em relação a uma circunferência
- Determinação do centro e do raio da circunferência
- Investigar e desenvolver a equação geral da circunferência.

Objetivos Específicos:

- Calcular a distância entre um ponto e uma circunferência;
- Calcular a distância entre uma reta e uma circunferência;
- Determinação do centro e do raio da circunferência.

Conteúdo:

Circunferência

Recursos Didáticos:

Material do aluno.

Encaminhamento metodológico:

Neste encontro do Promat vamos modelar a matemática em um evento contextualizado.

Vulcões

O vulcão de Nishinoshima está situado próximo a ilha Rosário uma pequena ilha oceânica isolada a oeste de Hahajima e ao norte do Grupo Vulcano das ilhas Ogasawara do Japão.

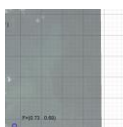
A ilha possui um vulcão ativo cuja última grande erupção ocorreu nos anos de 1973 - 1974, alargando substancialmente a ilha para Oeste e elevando o seu cume até aos 52 m acima do nível médio do mar. Ao longo das últimas décadas ocorreram diversas pequenas erupções submarinas em torno da ilha.

O vulcão permanece ativo com pequenas erupções contínuas, em 2014 o vulcão tinha 290 metros quadrados, em abril de 2017 a guarda costeira japonesa confirmou que uma erupção ocorreu na cratera central da ilha deixando maior com treze vezes o seu tamanho original, chegando próxima de 2,8 km².

Uma pesquisa aérea conduzida no início de maio de 2017 descobriu que as erupções continuaram liberando fumaça cinza a cerca de 500 metros no ar.

Atividade 1: O vulcão de Nishinoshima está centrado na origem. Sabendo que F é o ponto da circunferência que define a maior distância alcançada pelo vulcão e que sua área real era de 81 m².

- a) Qual a proporção do gráfico?
- b) Qual é o raio da circunferência. (Use aproximação de uma casa decimal)?
- c) Qual diâmetro da circunferência que define a maior distância alcançada pelo vulcão, nos valores (reais)?



Atividade 2: Sabendo que este vulcão cresce em média 810 m² por ano, quantos anos ele vai sobrepor a ilha chegando no ponto E.

Circunferência

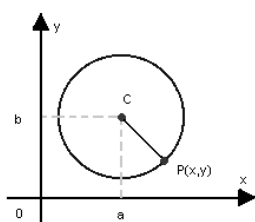
Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo desse mesmo plano, denominado centro da circunferência:

Exemplo: Em uma circunferência de diâmetro 3, a que distância os pontos da circunferência estão do centro?

Equações da circunferência

Equação reduzida

Seja $C(a, b)$ o centro e $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência, a distância de C a P (d_{CP}) é o raio dessa circunferência. Então:



$$d_{cp} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Portanto, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a equação reduzida da circunferência e permite determinar os elementos essenciais para a construção da circunferência: as coordenadas do centro e o raio.

Observação: Quando o centro da circunferência estiver na origem ($C(0,0)$), a equação da circunferência será $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação geral

Desenvolvendo a equação reduzida, obtemos a equação geral da circunferência:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Exemplo:

Vamos determinar a equação geral da circunferência de centro $C(2, -3)$ e raio $r = 4$.

A equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Determinação do centro e do raio da circunferência

Dada a equação geral de uma circunferência, utilizamos o processo de fatoração de trinômio quadrado perfeito para transformá-la na equação reduzida e, assim, determinamos o centro e o raio da circunferência. Para tanto, a equação geral deve obedecer a duas condições:

- Os coeficientes dos termos x^2 e y^2 devem ser iguais a 1;
- Não deve existir o termo xy .

Exemplo:

vamos determinar o centro e o raio da circunferência cuja equação geral é $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$. Observando a equação, vemos que ela obedece às duas condições. Assim:

1º passo: agrupamos os termos em x e os termos em y e isolamos o termo independente

$$x^2 - 6x + _ + y^2 + 2y + _ = 6$$

2º passo: determinamos os termos que completam os quadrados perfeitos nas variáveis x e y , somando a ambos os membros as parcelas correspondentes

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & -6x & +9 & +y^2 & +2y & +1 & = 6 + 9 + 1 \\ \downarrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow & \\ x & 2x & 3 & y & 2y & 1 & \end{array}$$

3º passo: fatoramos os trinômios quadrados perfeitos

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

4º passo: obtida a equação reduzida, determinamos o centro e o raio.

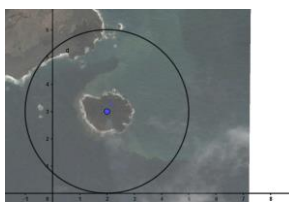
$$a = 3 \quad b = -1 \Rightarrow C(3, -1) \quad r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

Atividade 3: Escreva a equação da circunferência quando o vulcão está centralizado em (0,0)

Atividade 4: Por segurança os navios devem ficar a certa distância do vulcão. Conhecendo o centro e um ponto é possível determinar a circunferência que representa a faixa de segurança? Centro A=(2,3) e B=(5,3).

a) Qual é o raio de segurança?

b) Determine a equação da circunferência?



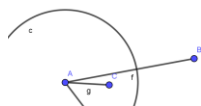
Atividade 5: A partir da Atividade 4 determine os casos onde um navio de pesquisadores que estão estudando o vulcão estaria em risco, na faixa limite ou fora de risco.

- a) (2,1)
- b) (5,2)
- c) (2,6)
- d) (2,4)

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

Assim, para determinar a posição de um ponto $P(m, n)$ em relação a uma circunferência, basta determinar o raio da circunferência e em seguida calcular a distância do centro da circunferência ao ponto $P(m, n)$.

Se $d - r > 0$, então é ponto exterior (como



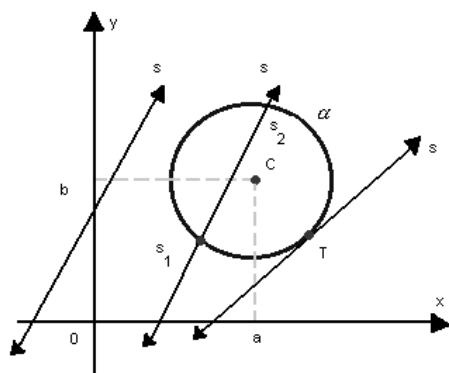
o exemplo ao lado b é exterior).

Se $d - r = 0$, então é ponto da circunferência.

Se $d - r < 0$, então é ponto interior.

Posição de uma reta em relação a uma circunferência

Dadas uma reta $s: Ax + Bx + C = 0$ e uma circunferência α de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, vamos examinar as posições relativas entre s e α :



$$\begin{aligned} s \cap \alpha &= \emptyset \Rightarrow s \text{ é exterior a } \alpha \\ s \cap \alpha &= \{T\} \Rightarrow s \text{ é tangente a } \alpha \\ s \cap \alpha &= \{s_1, s_2\} \Rightarrow s \text{ é secante a } \alpha \end{aligned}$$

Também podemos determinar a posição de uma reta em relação a uma circunferência calculando a distância da reta ao centro da circunferência. Assim, dadas a reta $s: Ax + By + C = 0$ e a circunferência $\alpha: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$$d_{C_s} = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Assim:

Se $d - r > 0$, então é reta exterior (como o exemplo ao lado b é exterior).

Se $d - r = 0$, então é reta tangente a circunferência.

Se $d - r < 0$, então é reta secante a circunferência.

Exercícios

1. O centro de uma circunferência é o ponto médio do segmento AB , sendo $A(4; -7)$ e $B(-8; -3)$. Se o raio dessa circunferência é 3, determine sua equação.
2. (PUC-SP) O ponto $P(3, b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C(0, 3)$ e raio. Calcule o valor da coordenada b .
3. (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C(2, 1)$ e que passa pelo ponto $A(1, 1)$.

4. Qual a distância entre os pontos da reta $0=y-2x-400$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 400$?

5. Um cargueiro precisou mudar sua rota para próximo de um vulcão subaquático. O cargueiro recebeu as coordenadas exatas do vulcão após ter chegado ao porto. Algumas coordenadas foram anotadas durante a viagem. Dadas as coordenadas descreva se acaso o navio chegou a correr riscos?

Coordenadas do vulcão $C(5,5)$.

O vulcão apresentava perigo em uma área de 16π em seu redor. As coordenadas anotadas durante a viagem foram

• $E(12,1)$ $P(8,2)$ $G(6,3)$ $T(7,6)$ $Y(7, 8.46)$ $M(7,10)$

Determine uma reta que não na qual o navio não corresse perigo.

Avaliação

Os estudantes serão avaliados de forma diagnóstica e continuada quanto à participação durante as discussões sobre o conteúdo, considerando a assimilação do conteúdo trabalhado e as dificuldades apresentadas pelos estudantes durante o processo de elaboração da atividade proposta.

Referências bibliográficas

CIRCUNFERÊNCIA. Disponível em: <<https://www.somatematica.com.br/emedio/circunferencia/circunf.php>>. Acesso em: 15 jul. 2015.

O CÍRCULO Trigonométrico. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/mundo_trigonometria/teoria/circulo.html>. Acesso em: 15 jul. 2018.

CÍRCULO Trigonométrico. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/>>. Acesso em 15 jul 2018.

COSSENOS e senos. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yt57z2Tn>>. Acesso em 15 jul 2018.

Relato descritivo-reflexivo VII

Nesta aula, realizamos as correções das atividades de uma maneira diferente da adotada nas aulas anteriores, os alunos interessados poderiam reproduzir seus cálculos no quadro. Desse modo, explicamos a primeira atividade e dispusemos de tempo para que os estudantes pudessem resolver. Nesse momento, ao mediarmos a atividade, alguns estudantes demonstraram-se empolgados e curiosos com o tema da aula. Foi possível observar divergências entre alguns resultados encontrados pelos alunos, identificamos o erro nos arredondamentos e solicitamos para que eles deixassem os números em raízes e frações, sem transforma-los em decimal, pois constatamos que seria melhor para que compreendessem o funcionamento do exercício proposto.

Foi possível observar que os alunos realizavam uma boa interpretação do problema, porém tinham dificuldades em expressar métodos para resolver e, com nosso auxílio conseguimos progredir com as resoluções sem demasiadas dificuldades.

Ainda, próximo ao fim da aula, optamos por explicar expositivamente o conteúdo de distância entre retas e a circunferência, pois acreditávamos que o tempo não seria suficiente para explorarmos os exercícios. Contudo, próximo ao fim do encontro, alguns estudantes haviam completado o material que lhes dispusemos, estavam lendo e tirando dúvidas enquanto os demais colegas continuavam a calcular.

Plano de aula VIII – Análise Combinatória

Professores:

Johnaton, Luis, Lucas e Vinicius.

Público-Alvo:

Estudantes inscritos no PROMAT.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral

- Compreender os conceitos básicos de: Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutação Simples e Permutação com Repetição, relacionando-os com a realidade.

Objetivos Específicos

- Calcular a quantidade de maneiras possíveis de um evento ocorrer;
- Interpretar problemas e utilizar a contagem de forma adequada;
- Utilizar a Permutação na resolução de problemas envolvendo contagem.

Conteúdo:

Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples e Permutação com Repetição.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, material do estudante impresso, projetor.

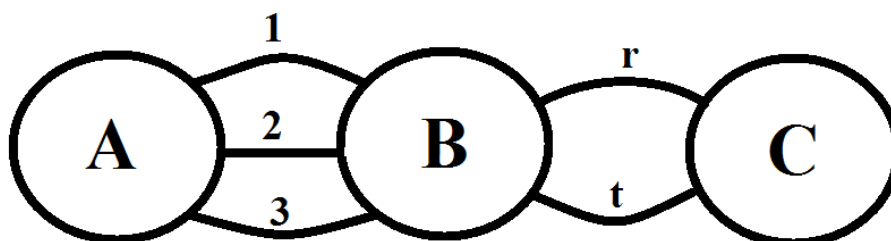
Avaliação:

Os estudantes serão avaliados de forma diagnóstica e continuada quanto à participação durante as discussões sobre o conteúdo, considerando a assimilação do conteúdo trabalhado e as dificuldades apresentadas pelos estudantes durante o processo de elaboração da atividade proposta.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula com o seguinte problema:

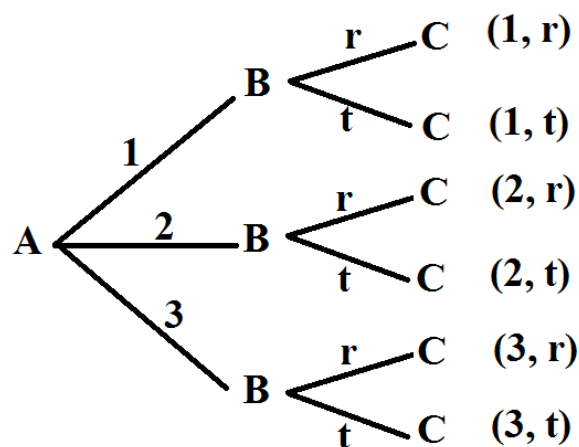
Atividade 1: As cidades A e B são ligadas pelas estradas 1, 2 e 3, e as cidades B e C são ligadas pelas estradas 'r' e 't', conforme a figura abaixo:



De quantas maneiras diferentes podemos ir de:

- a) “A” até “C”?
- b) “A” até “C” e depois voltar para “A”?
- c) “A” até “C” e depois voltar para “A”, sem repetir estradas?

Deixaremos que os alunos pensem na questão ‘a’ por alguns minutos, e então resolveremos no quadro com eles, apresentando o Diagrama de Árvore:



Assim, mostramos aos alunos as 6 possibilidades de trajetos existentes. Então, passamos à alternativa ‘b’ e deixamos que os alunos a resolvam. Então, mostramos no quadro novamente o diagrama de árvore, para que os alunos percebam o quão demorado ficaria a construção, e então questionaremos aos alunos se há uma maneira mais fácil de calcular o número de possibilidades.

Assim que a ideia for apresentada, passamos ao exercício ‘c’, deixando novamente que os alunos pensem por um tempo na sua resolução. Após a correção no quadro, formalizaremos o Princípio Fundamental da Contagem da seguinte forma:

Se há x modos de se tomar uma decisão A e, tomada essa decisão A , há y modos de se tomar uma decisão B , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões A e B é igual ao produto $x.y$.

Então, daremos exercícios aos alunos para que resolvam em sala:

Exercício 1: Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pinturas estão indicadas abaixo:

Primeira: verde, amarelo, bege, verde, cinza;

Segunda: verde, cinza, verde, bege, cinza.

Quantas são as possibilidades?

Exercício 2: Quantos são os números de 3 algarismos distintos?

Exercício 3: Quantos são os números de 4 algarismos formados apenas por algarismos pares?

Exercício 4: Em uma competição de atletismo, participam 8 corredores. De quantas maneiras diferentes pode ser composto o pódio com os três primeiros colocados?

Exercício 5: Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, podem-se formar quantos números:

a) de quatro algarismos?

- b) de quatro algarismos distintos?
- c) ímpares de três algarismos distintos?

Após os exercícios, apresentaremos o conceito de Fatorial de um número Natural, utilizando o seguinte problema:

Atividade 2 Quando o assunto é política, Fernanda adora. Nesse ano de eleições para Presidente da República, estão concorrendo os candidatos A, B, C, D e E. Fernanda já tem o seu voto definido há muito tempo, porém, resolveu pensar em qual candidato ela votaria se tivesse que mudar de escolha caso, por exemplo, o candidato escolhido por ela tomasse uma facada e morresse antes da eleição. Então, Fernanda elencou os 5 concorrentes à presidência de acordo com a preferência de voto, sendo o 1º da lista aquele em que ela prefere votar e o 5º aquele em que ela menos gostaria de votar. De quantas maneiras Fernanda poderia listar os 5 candidatos?

Os alunos deverão usar o PFC (Princípio Fundamental da Contagem) para chegarem à resolução dessa questão. Então, ao resolvermos a questão no quadro, mostraremos aos alunos que o cálculo utilizado na resolução é muito comum em problemas de contagem, e que há uma maneira de representar esses cálculos utilizando o Fatorial de um número natural:

Seja um número natural n , denotamos o fatorial de n por $n!$, que se define da seguinte forma: $n!$ = o produto de todos os números inteiros de 1 até n , se $n \geq 2$.

- $0! = 1$.
- $1! = 1$.

Então, podemos introduzir o conceito de Permutação Simples, falando aos alunos que esse conceito facilita muito na resolução de problemas de contagem em que se deve apenas TROCAR elementos de lugar.

$P_n = n!$ é o número de maneiras de se dispor n objetos distintos em fila.

Retornaremos ao exercício anterior para mostrar a utilidade desse novo conceito, e sempre reforçaremos aos alunos que o simples conhecimento de Contagem já é suficiente para resolver exercícios.

Então, daremos atividades aos alunos.

Exercício 6: De quantas formas se pode dispor 4 pessoas em uma fila indiana?

Exercício 7: Quantos são os anagramas da palavra MATRIZ?

Exercício 8: Luiz precisa trocar a lâmpada da sala, lavar a louça, estudar para a prova de matemática e arrumar seu quarto. De quantas maneiras diferentes ele pode executar essa sequência de atividades?

Exercício 9: Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, quantos números de 5 algarismos podemos formar, sem repeti-los?

Exercício 10: Escreva todos os anagramas com as letras da palavra BOLA que começam com a letra L:

Após os exercícios, daremos o seguinte problema:

Atividade 3: Quantos são os anagramas da palavra ASA? E da palavra MOTO? E da palavra ARARA? Escreva todas as possibilidades de palavras formadas.

Espera-se que os alunos tentem conferir utilizando a permutação simples para efetuar os cálculos. Ao perceberem a diferença, questionaremos a eles qual é o motivo do “erro”. Então, pediremos a eles que comparem o número de casos detalhados e o resultado da permutação simples, e pediremos para que tentem descobrir uma maneira de transformar o valor obtido na permutação no resultado correto.

Assim, trabalharemos a noção de Permutação com Repetição com os alunos, mostrando a maneira correta de dividir o $n!$ pelo fatorial da quantidade de elementos que se repetem.

Exercício 11: Com dois algarismos 1, dois algarismos 2 e três algarismos 3, quantos números de sete algarismos podem ser formados?

Exercício 12: Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ARQUIMEDES que começam e terminam com a letra E?

Exercício 13: De quantas maneiras podemos alinhar 8 moedas sobre uma mesa, sendo 4 de R\$0,25 e 4 de R\$0,50?

Exercício 14: Quantos anagramas da palavra BANANADA começam com a letra B?

Exercício 15: Quantos são os anagramas da palavra BATATA nos quais:

- a) as vogais estejam sempre juntas?
- b) vogais e consoantes estejam intercaladas?

Referências

MÓDULO de Princípios Básicos de Contagem - Princípio fundamental da contagem: Segundo ano. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cernvmc6v3ks4.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

MÓDULO de Princípios Básicos de Contagem - Permutação com repetição: Segundo ano. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/gfemxnydsdkok.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

MÓDULO de Princípios Básicos de Contagem - Permutação simples: Segundo ano. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/gvxnzlixqps0w.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

Iniciamos a aula apresentando uma situação problema prevista no plano de aula, para então abordar o conteúdo de princípio fundamental da contagem. A atividade era composta de três itens, sendo que na resolução do primeiro, boa parte da turma demonstrou saber resolver, mas para os próximos itens, em que era necessário tomar cuidado com algumas restrições, os alunos apenas observavam enquanto o professor ensinava o método correto e mostrava o diagrama de árvore para o cálculo de possibilidades.

Após apresentar a definição do conteúdo proposto, pedimos aos alunos para que resolvessem os exercícios previstos no plano de aula, enquanto os professores passavam nas carteiras auxiliando os alunos e mediando as atividades propostas.

Depois, prosseguimos com a aula trazendo uma segunda atividade para apresentar o conceito de permutação simples. Ao terminar de ler a atividade para a turma, prontamente um dos alunos respondeu em voz alta sobre o que era necessário para resolver o problema, inclusive dizendo o nome do conteúdo que envolvia a situação. Devido a isso, o professor resolveu apresentar o conceito, definindo permutação simples e propondo que os alunos resolvessem os exercícios em sala.

Por fim, utilizamos uma terceira atividade para introduzir o conceito de permutação com repetição. Muitos alunos já haviam ido embora devido ao horário e conflitos de transporte. Os poucos estudantes que permaneceram em aula demonstraram não conhecer o conceito apresentado, mas na resolução dos exercícios pudemos perceber que entenderam o conteúdo conseguiam aplicá-lo da maneira correta durante os exercícios.

Plano de aula IX – Análise Combinatória

Professores:

Johnaton Pidorodeski Rocha e Lucas Teixeira Bernardo

Público-Alvo:

Estudantes inscritos no PROMAT.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral

- Compreender os conceitos básicos da análise combinatória, relacionando-os com a realidade.

Objetivos Específicos

- Utilizar as ferramentas específicas para resolver problemas de contagem, como arranjo simples e com repetição. combinação simples e com repetição.
- Definir e diferenciar cada uma dessas ferramentas de resolução.

Conteúdo:

Arranjo simples e com Repetição, Combinação Simples e com Repetição.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, material do estudante impresso, projetor.

Avaliação:

Os estudantes serão avaliados de forma diagnóstica e continuada quanto à participação durante as discussões sobre o conteúdo, considerando a assimilação do conteúdo trabalhado e

as dificuldades apresentadas pelos estudantes durante o processo de elaboração da atividade proposta.

Encaminhamento metodológico:

Problema 1: Considerando um grupo com 10 pessoas, de quantas maneiras possíveis pode-se formar uma fila composta por:

5 pessoas?

6 pessoas?

7 pessoas?

8 pessoas?

9 pessoas?

10 pessoas?

Organize os dados na tabela abaixo.

Nº de pessoas	Possibilidades		
4	$10 \times 9 \times 8 \times 7$	$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$	$\frac{10!}{6!}$
5			
6			
7			
8			
9			
10			

A partir desses dados o que podemos observar?

Se ao invés de 10 pessoas tivéssemos n pessoas e quiséssemos formar uma fila com p pessoas. De quantas maneiras possíveis poderíamos formar esta fila?

Arranjo: Arranjo é uma forma de agrupamento em que é levada em consideração a ordem dos elementos.

Arranjo Simples: A ferramenta Arranjo Simples pode ser utilizada quando desejamos formar grupos com p elementos escolhidos a partir de um grupo de n elementos, com $p \leq n$.

Assim, podemos realizar esse processo de $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ maneiras distintas.

Problema 2: Qual o total de placas de carro que podem ser construídas com sete símbolos, sendo os três primeiros constituídos por letras e os quatro últimos por algarismos? (considere para esse problema o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9).

Solução: Considerando-se o alfabeto com 26 letras, podemos escolher os três primeiros símbolos de AR_{26}^3 maneiras diferentes e os quatro últimos de AR_{10}^4 . Logo, pelo princípio do produto, temos um total de $AR_{26}^3 \times AR_{10}^4 = 26^3 \times 10^4$, isso é, podem ser construídas 175760000 placas.

Arranjo com Repetição: A ferramenta de arranjo com repetição é utilizada quando todos os elementos podem aparecer repetidos em cada agrupamento de p elementos. $AR_n^p = n^p$.

Problema 3: Quantas saladas contendo exatamente três frutas podemos formar se dispomos de 12 frutas diferentes?

Solução: $C_{12,3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = 220$ saladas.

Combinação: Combinação é um tipo de agrupamento em que não se leva em conta a ordem dos elementos.

Combinação Simples: É todo agrupamento não ordenado de elementos distintos. Tais agrupamentos são conhecidos também por conjuntos. $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Qual a diferença entre Arranjo, Combinação e Permutação?

Combinação de p elementos, n a n, é o número de conjuntos de n elementos que se pode fazer com os p elementos, não importando a ordem desses elementos. Por exemplo, se temos 3 elementos a, b e c, e queremos combiná-los 2 a 2, temos as seguintes possibilidades: ab ou (ba), ac ou (ca), bc ou (cb). Portanto 3 possibilidades. Utilizando a fórmula, temos:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1(1)!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Arranjo de p elementos, n a n, é o número de conjuntos de n elementos que se pode fazer com os p elementos, importando a ordem desses elementos. Por exemplo, se temos 3 elementos a, b e c, e queremos combiná-los 2 a 2, temos as seguintes possibilidades: ab, ba, ac, ca, bc e cb. Portanto 6 possibilidades. Utilizando a fórmula, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{(1)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Permutação de p elementos é o número de arranjos que se pode fazer com esses p elementos, trocando a ordem deles. Por exemplo, para os elementos a, b e c, podemos ter: abc, acb, bac, bca, cab e cba. Portanto 6 possibilidades. Utilizando a fórmula, temos:

$$P_n = n!$$

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Exercícios

1 - (UNIOESTE 2012): Quantas palavras podemos formar, independente se tenham sentido ou não, com as 9 letras da palavra BORBOLETA?

2 - (UNIOESTE 2011): Em um determinado país as placas dos automóveis são constituídas por três vogais e quatro algarismos. Num acidente de trânsito, o motorista culpado dirigia em alta velocidade e após a colisão fugiu rapidamente. No entanto, pessoas que passavam pelo local testemunharam afirmando que a placa era constituída de três letras distintas e quatro algarismos diferentes e embora não tenham conseguido anotar a placa na íntegra, afirmaram que o algarismo da unidade era 2. Diante disso, qual o número de veículos suspeitos que a polícia terá que investigar?

3 - (UNIOESTE 2011): Quantos números inteiros não negativos inferiores a 1000, com algarismos todos diferentes, existem no sistema de numeração decimal?

4 - De quantas maneiras 12 moças e 12 rapazes podem formar pares para uma dança?

5 - (UFMG) A partir de um grupo de 14 pessoas, quer-se formar uma comissão de oito integrantes, composta de um presidente, um vice-presidente, um secretário, um tesoureiro e quatro conselheiros. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode compor essa comissão?

Referências

EXERCÍCIO (Unioeste 2012). Disponível em: <<http://educacao.globo.com/matematica/assunto/algebra/permutacao.html>>. Acesso em: 19 set. 2018.

EXERCÍCIO (Unioeste 2011). Disponível em: <<https://pir2.forumeiros.com/t102357-unioeste-2011>>. Acesso em: 19 set. 2018.

EXERCÍCIO (Unioeste 2011). Disponível em: <<https://www.stoodi.com.br/exercicios/unioeste/2011/questao/em-um-determinado-pais-as-placas-dos-automoveis-sao-constituídas/>>.

Acesso em: 19 set. 2018.

EXERCÍCIO (UFMG). Disponível em: <<https://pir2.forumeiros.com/t97777-ufmg-analise-combinatoria>>. Acesso em: 19 set. 2018.

PAVIONE, D. **Matemática e raciocínio lógico**. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/362713551/Colecao-Concursos-Publicos-Nivel-Medio-Damare-Pavione-pdf>>. Acesso em: 19 set. 2018.

Devido a Unioeste ser um local de votação eleitoral, perdemos uma aula em nosso cronograma e, portanto, este foi o último encontro do Promat. Assim, por se tratar da última aula, todos os professores estagiários do Promat decidiram fazer uma confraternização para os estudantes participantes do projeto e, sendo assim, planejamos duas horas-aula para que pudéssemos realizar uma confraternização.

Como nosso cronograma foi modificado, optamos por não iniciar um novo conteúdo e demos continuidade aos conceitos de Análise Combinatória explicando Arranjo, Combinação e Permutação, solicitando que os estudantes resolvessem os exercícios do material disponibilizado.

Nesta situação, foram utilizados exercícios de vestibulares da Unioeste e UFMG, com a intenção de exemplificar aos os estudantes quais eram as abordagens deste conteúdo em vestibulares, especificamente. Durante a resolução destes exercícios, os alunos apresentaram poucas dúvidas e, quando nos perguntavam sobre as questões propostas, buscávamos salientar as informações que eles próprios já dispunham para inferir, em conjunto com o estudante, uma maneira de resolver a atividade.

Ao terminarmos o conteúdo proposto, iniciamos uma conversa com os estudantes perguntando sobre como o curso contribuiu para seus estudos. Então, responderam-nos apresentando satisfações e agradecimentos quanto às explicações que lhes proporcionamos, assim como houve uma compreensão boa acerca da possibilidade de estudos que o curso oferece, de maneira geral. Também comentaram sobre como a falta de afinidade dentre si, estudantes, dificultou a interação nas aulas. Após tal conversa, todos fomos para a confraternização, que finalizou o curso.

Plano de aula X – Probabilidade

Público-Alvo:

Alunos inscritos no Promat

Tempo de execução:

4 horas aulas

Objetivo Geral: Levar os alunos à compreensão de experimentos determinísticos, aleatórios, espaço amostral, eventos, manipulação de eventos.

Conteúdo:

Probabilidade

Recursos Didáticos: Quadro, multimídia.

Encaminhamento metodológico:

1. Uma ideia do que é a probabilidade (5min)
2. Motivação para a produção de tal conhecimento (abordagem histórica)
3. Vídeo teoria das probabilidades
4. Vídeos problema dos pontos
5. Questões relativas ao vídeo problema dos pontos
6. Conceitos de probabilidade

Desenvolvimento

Ao iniciar a aula utilizar um momento de **Brainstorming**, para responder a seguinte pergunta.

O que é Probabilidade?

Espera-se neste momento procurar algum resquício sobre este conhecimento, posteriormente utilizar na discussão.

Em seguida utilizando das questões abaixo, introduz-se a ideia de experimentos determinísticos. É importante que os alunos anotem as perguntas, para posteriormente terem o material de estudo.

A que temperatura a água entra em ebulição?

Se largarmos uma bola, com que velocidade ela atinge o chão?

Nestas condições é perfeitamente possível responder a essas perguntas, antes mesmo da realização desses experimentos. Esses experimentos são denominados determinísticos, pois nele os resultados podem ser previstos.

- **Em seu caderno descreva um experimento que seja determinístico.**
- **Se repetirmos os experimentos, será possível determinarmos os resultados, eles serão diferentes? justifique sua resposta.**

Em seguida utilizando das questões abaixo, introduz-se a ideia de experimentos aleatórios.

Considere agora os seguintes experimentos:

- a. No lançamento de uma moeda, qual a face que ficara para cima?
- b. Em um baralho de 52 cartas, uma foi retirada qual carta é essa?

Nos experimentos com a moeda, podemos obter cara ou coroa e com o baralho teríamos 52 diferentes e possíveis resultados.

- **em seu caderno descreva um experimento q não seja determinístico.**
- **Se repetirmos os experimentos, será possível determinar os resultados, eles serão diferentes? justifique sua resposta.**

Estes experimentos, cujo resultado é imprevisível, são denominados de experimento aleatório, esses eventos apresentam as seguintes características:

- a) Pode se repetir várias vezes nas mesmas condições
- b) É conhecido o conjunto de todos os resultados possíveis
- c) Não se pode prever o resultado.

A probabilidade na área da matemática, nós permitimos interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direto ou exatamente. Atualmente as aplicações com cálculos de probabilidade ultrapassam largamente a relacionada com os jogos de azar (dados, cartas, loterias, rifas etc).

Aqui será passado um vídeo pequeno sobre teoria da probabilidade.

<https://www.youtube.com/watch?v=9m2uZ1yS2QY>

A teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar na Idade Média. Esse tipo de jogo é comumente praticado através de apostas, na ocasião também era utilizado no intuito de antecipar o futuro. Os alicerces da teoria do cálculo das probabilidades e da análise combinatória foram estabelecidos por Pascal e Fermat, as situações relacionando apostas no jogo de dados levantaram diversas hipóteses envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades.

Vídeo problema dos pontos

Espaço amostral: É o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento e indicamos por S .

Ex: Em dois dados de seis faces cada, temos 36 como espaço amostral.

Faça um exemplo em seu caderno!

Evento é um conjunto de resultados do experimento, em termos de conjunto, é subconjunto do espaço amostral S .

Ex: em um baralho retirarmos todas as cartas com figuras.

- 1) Descreva em seu caderno qual a diferença entre, Evento e Espaço amostral.
- 2) Será possível o Evento ser menor que o Espaço amostral? Será possível ser igual? Será possível ser maior? De exemplos.
- 3) Voltando ao vídeo determine o Espaço amostral e Eventos.

Podemos dividir os eventos em vários casos como:

Evento nulo

O evento nulo é aquele no qual não há nenhuma possibilidade de ocorrer.

Evento certo

O evento certo é aquele que tem 100% de chances de acontecer.

Evento complementar

Seja um evento A .

O evento B complementar ao evento A , é o conjunto dos elementos do espaço amostral que não pertencem a A .

$$A \cup B = \text{conjunto Amostral}$$

Exemplos.

Suponhamos ter colocado posto um ovo de galinha para chocar. Nosso espaço amostral será determinado ao chocar o ovo será menino ou menina?

Espaço amostral: É menino ou menina. Descartamos a hipótese do ovo gorar.

Evento nulo.

Qual a probabilidade de surgir um rinoceronte de dentro do ovo?

R: 0%, pois este resultado não está no espaço amostral.

Evento certo.

Qual a probabilidade de surgir uma ave de dentro do ovo?

R: 100%, como determinamos no início o ovo deve ser de galinha.

Evento complementar.

R: Seja então que descascou nosso ovo e é menino. O evento complementar será a menina, pois ao unirmos os dois eventos temos o nosso espaço amostral.

A probabilidade é o ato de atribuímos pesos aos eventos. Quando lançamos uma moeda não hesitamos em associar probabilidade $\frac{1}{2}$ para o evento "cara" e também $\frac{1}{2}$ para o evento

"coroa". Da mesma forma, quando lançamos uma moeda x vezes todos os possíveis resultados deste experimento têm a mesma probabilidade 2^x .

Definição: forma geral a probabilidade de um evento acontecer será dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A)$ Probabilidade do evento.

$n(S)$ Número de elementos do espaço amostral.

$n(A)$ Número de elementos de casos possíveis para o evento ocorrer.

i) Todas as probabilidades são maiores ou iguais a zero

ii) A soma de todas as probabilidades é igual a 1

1. O que acontece se uma probabilidade for maior que 1? E se a soma for superior a um?

União de dois eventos: Considerando A e B dois eventos contidos em um mesmo espaço amostral S , um número de elementos de reunião de A com B é igual ao número de elementos do evento A somado ao número de elementos do evento B , subtraído do número de elementos da intersecção de A com B .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Atividades

2. Explique o que é probabilidade.
3. No lançamento de dois dados, determine o espaço amostral.
4. No lançamento de dois dados qual a probabilidade de ocorrer o evento A : {números iguais}?
5. Qual a probabilidade de ocorrer o evento B : {a soma das faces voltadas para cima ser maior que 6}?
6. Suponhamos que a cor dos olhos seja estabelecida por pares de genes, onde C seja dominante para olho escuro e c recessivo para olho claro. Um homem que possua os olhos escuros, mas com mãe de olhos claros, casou-se com uma mulher de olhos claros cujo pai possui olhos escuros. Determine a probabilidade de nascer uma criança de olhos escuros.
7. De uma urna com 10 bolinhas numeradas de 1 a 10 retira-se ao acaso uma bolinha. Determine o espaço amostral e determine qual a probabilidade dessa bolinha ter o número divisível por dois ou por três?
8. (ENEM 2011) - Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de

acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

CAMPANHA DE VACINAÇÃO CONTRA A GRIPE SUÍNA		
DATAS DE VACINAÇÃO	PÚBLICO – ALVO	QUANTIDADE DE PESSOAS VACINADAS
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças Crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

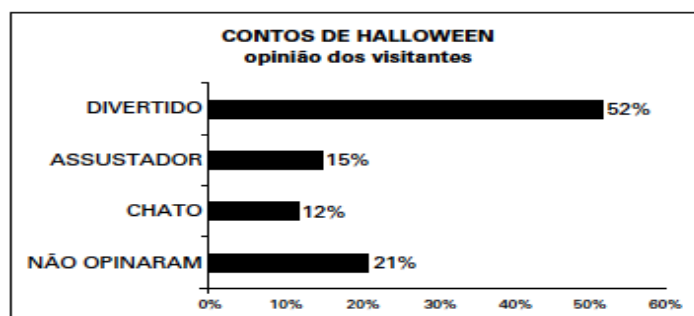
9. (ENEM 2011): Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

10. (UNIOESTE): Dois dados não viciados são lançados simultaneamente. Considerando os números correspondentes às faces voltadas para cima, é correto afirmar que

- (a) a probabilidade de a soma ser par é igual a 50%.
- (b) a probabilidade de o produto ser par é igual a 50%.
- (c) a probabilidade de obter 3 em pelo menos uma das faces é igual a $\frac{1}{3}$.
- (d) a probabilidade de obter o mesmo resultado nos dois dados é igual a $\frac{1}{18}$.
- (e) a probabilidade de obter dois seis é igual a $\frac{1}{12}$

11. (ENEM): Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar,

assinalando suas relações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”.

1. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

Avaliação

Os alunos serão avaliados por seu desempenho em uma avaliação.

Referências:

HISTÓRIA da Probabilidade. Disponível em: <<http://www.brasilecola.com/matematica/historia-probabilidade.htm>>. Acesso em: 10 nov. 2018.

ORIGEM das probabilidades. Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/probab.php>>. Acesso em: 10 nov. 2018.

TEORIA das probabilidades. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=9m2uZ1yS2QY>>. Acesso em: 07 out. 2018.

CARA ou Coroa - problemas dos pontos probabilidade. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=CaNe80tOJMQ>>. Acesso em: 07 out. 2018.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática ensino médio**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2008.

GIOVANNI; BONJORNIO. **Matemática completa**: série 2º - Ensino Médio. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

Relato descritivo-reflexivo X

Este plano não foi aplicado, pois tivemos mudanças em nosso calendário devido às eleições presidenciais brasileiras, não sendo possível a utilização das salas de aula em dois encontros programados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta Prática de Ensino e Estágio Supervisionado, buscamos significar o conteúdo trabalhado pelos estudantes de maneira a contribuírem para suas vivências e, principalmente, para que continuassem e expandissem os conhecimentos desenvolvidos durante seus períodos e trajetórias escolar. Por isso, houve a necessidade de que abordássemos o maior número possível de problemas e exercícios, que diversificassem suas compreensões sobre os conteúdos estudados.

Deste modo, trabalhamos com diversos exemplos de atividades retiradas de processos vestibulares e das versões do Enem, que abordassem o ensino dos conceitos de Tratamento da Informação, Trigonometria – no triângulo retângulo, círculo trigonométrico e relações trigonométricas –, Geometria Analítica – plano cartesiano, retas e circunferência –, Análise Combinatória e Probabilidade, de tal forma que o estudante desenvolvesse sua autonomia para a compreensão enunciativa – dos dados dispostos nos enunciados – e também a capacitação para que desenvolvessem com êxito suas provas de vestibulares.

Nesse sentido, buscamos uma prática docente onde o estudante desenvolvesse criticamente os passos percorridos durante as aulas e exemplificações, compreendessem a utilização conceitual em diferentes enunciados e assimilassem os conteúdos estudados relativo aos seus cotidianos, conforme já exemplificado durante os relatos descritivos reflexivos desta prática.

Por fim, destacamos que tais experiências propiciadas pela atuação no Promat teve um impacto fundamental em nossa formação como professores de Matemática, uma vez que nos encontramos em situações que fogem ao planejamento educacional das aulas, requerendo que nos dispuséssemos a transpor possíveis dificuldades relativas às relações dentre estudante-professor, professor-estudante, professor-conteúdo, conteúdo-estudante, entre outros. Ademais, salientamos a contribuição socio-educacional do programa Promat, que contribuiu para que estudantes do ensino público tenham acesso ao ensino superior.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARA ou Coroa - problemas dos pontos probabilidade. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=CaNe80tOJMQ>>. Acesso em: 07 out. 2018.

CÍRCULO Trigonométrico. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/>>. Acesso em 15 jul 2018.

CIRCUNFERÊNCIA. Disponível em: <<https://www.somatematica.com.br/emedio/circunferencia/circunf.php>>. Acesso em: 15 jul. 2015.

COSSENOS e senos. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yt57z2Tn>>. Acesso em 15 jul 2018.

DESAFIO. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1183>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

EQUAÇÃO da reta. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/equacao-da-reta/>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

EXERCÍCIO (UFMG). Disponível em: <<https://pir2.forumeiros.com/t97777-ufmg-analise-combinatoria>>. Acesso em: 19 set. 2018.

EXERCÍCIO (Unioeste 2011). Disponível em: <<https://pir2.forumeiros.com/t102357-unioeste-2011>>. Acesso em: 19 set. 2018.

EXERCÍCIO (Unioeste 2011). Disponível em: <<https://www.stoodi.com.br/exercicios/unioeste/2011/questao/em-um-determinado-pais-as-placas-dos-automoveis-sao-constituídas/>>. Acesso em: 19 set. 2018.

EXERCÍCIO (Unioeste 2012). Disponível em: <<http://educacao.globo.com/matematica/assunto/algebra/permutacao.html>>. Acesso em: 19 set. 2018.

EXERCÍCIO Enem 2013. Disponível em: <<http://educacao.globo.com/provas/enem-2013/questoes/162.html>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

EXERCÍCIO Enem. Disponível em: <<http://educacao.globo.com/provas/enem-2013/questoes/137.html>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

EXERCÍCIO Enem. Disponível em: <<http://matematicacentrao3.blogspot.com/2014/08/exercicios-sobre-graficos-estatisticos.html>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

EXERCÍCIOS coeficiente angular e linear. Disponível em :<<http://cedt-matematica.blogspot.com/2013/03/3-ano-lista-coeficiente-angular-e.html>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

EXERCÍCIOS de equações da reta. Disponível em:<<https://www.infoescola.com/geometria-analitica/equacoes-da-reta/exercicios/>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

EXERCÍCIOS Geometria Analítica. Disponível em: <<https://blogdoenem.com.br/geometria-analitica-matematica-enem>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

EXERCÍCIOS. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=11#>>. Acesso em: 16.jun.2018.

EXERCÍCIOS. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsynurr1hh6w.pdf>. Acesso em: 16.jun.2018

FÓRMULAS de adição de arcos. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/formulas-adicao-arcos.htm>>. Acesso em: 15 jul. 2018.

GIOVANNI; BONJORNO. Matemática completa: série 2º - Ensino Médio. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

GRÁFICOS e Tabelas. Disponível em: <<https://blogdoenem.com.br/tipos-de-grafico-e-interpretacao-analise-grafica-para-o-enem/>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

HISTÓRIA da Probabilidade. Disponível em: <<http://www.brasilecola.com/matematica/historia-probabilidade.htm>>. Acesso em: 10 nov. 2018.

MÉDIA, moda e mediana. Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/tratamento-da-informacao-medidas-de-tendencia-central/medidas-de-tendencia-central-passando-a-limpo-as-ideias/>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

MELILLO, K. M. **Investigações Matemáticas e Trigonometria**: Uma abordagem para o 1º Ano do Ensino Médio. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~pgmat/monografias/Mono011.pdf>>. Acesso em: 25 jul. 2018.

MÓDULO de Princípios Básicos de Contagem - Permutação com repetição: Segundo ano. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/gfemxnydsdkok.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

MÓDULO de Princípios Básicos de Contagem - Permutação simples: Segundo ano. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/gvxnzlixqps0w.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

MÓDULO de Princípios Básicos de Contagem - Princípio fundamental da contagem: Segundo ano. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cernvmc6v3ks4.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

O CÍRCULO Trigonométrico. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/mundo_trigonometria/teoria/circulo.html>. Acesso em: 15 jul. 2018.

O CÍRCULO Trigonométrico. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/mundo_trigonometria/teoria/circulo.html>. Acesso em: 25 jul. 2018.

ORIGEM das probabilidades. Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/probab.php>>. Acesso em: 10 nov. 2018.

PAVIONE, D. **Matemática e raciocínio lógico**. Disponível em: < <https://pt.scribd.com/document/362713551/Colecao-Concursos-Publicos-Nivel-Medio-Damare-Pavione-pdf>>. Acesso em: 19 set. 2018.

PONTO médio. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=41>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

QUESTÕES Enem. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2013/segundo-dia/nos-ultimos-anos-televisao-tem-passado-por-uma-verdadeira-revolucao-em-termos-de-qualidade/>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

QUESTÕES Enem. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2017/segundo-dia/um-menino-acaba-de-se-mudar-para-um-novo-bairro-e-deseja-ir-padaria-pe-diu-ajuda-um-amigo-que/>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. Matemática ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2008.

TEOREMA de Pitágoras. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/teorema-de-pitagoras/>>. Acesso em: 16 jun. 2018.

TEORIA das probabilidades. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=9m2uZ1yS2QY>>. Acesso em: 07 out. 2018.

TRIGONOMETRIA. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=71#>>. Acesso em: 15 jul. 2018.

ANEXOS

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática.

NOME:

DATA: / /

PROFESSORES: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius

MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 01

1 - (ENEM 2017): No próximo fim de semana, uma pessoa receberá visitas em sua casa, precisando, portanto, comprar refrigerante. Para isso, ela fez a pesquisa de preços em dois supermercados e montou esta tabela.

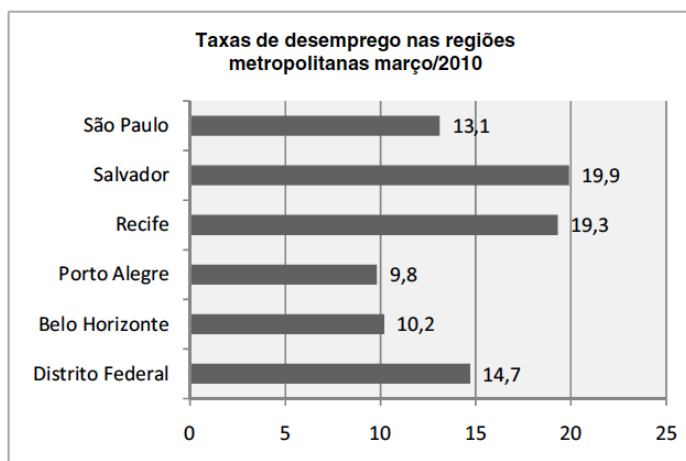
Ela pretende comprar apenas garrafas que tenham a mesma capacidade.

Independentemente de em qual supermercado essa pessoa fará a compra, a fim de ter o menor custo, ela deverá adquirir garrafas com que capacidade?

Volume da garrafa PET (L)	Preço no Supermercado A (R\$)	Preço no Supermercado B (R\$)
0,5	2,10	2,00
1,5	2,70	3,00
2,0	4,20	3,20
2,5	6,00	4,70
3,0	6,90	5,00

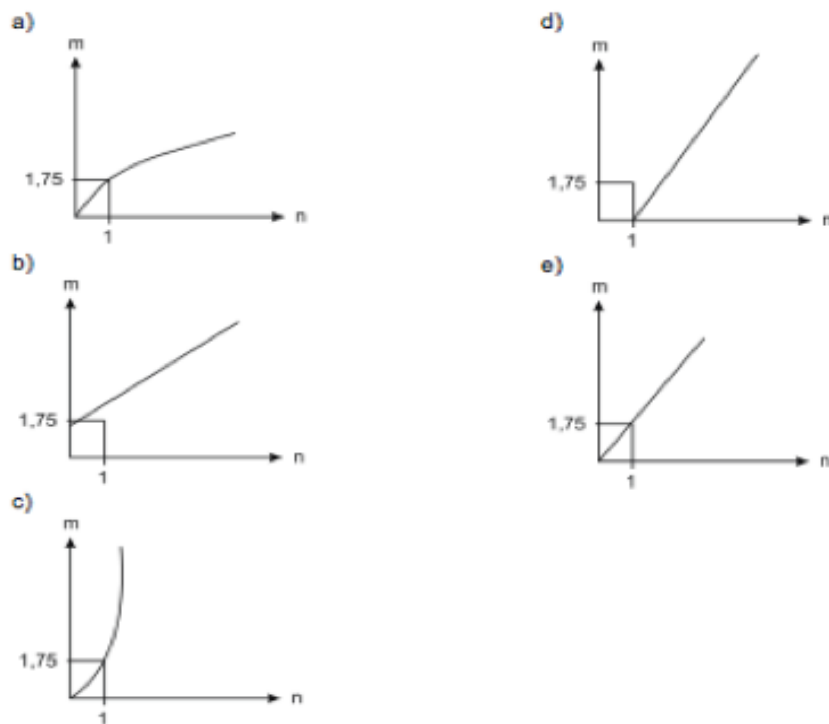
2 - (ENEM 2010): Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de:



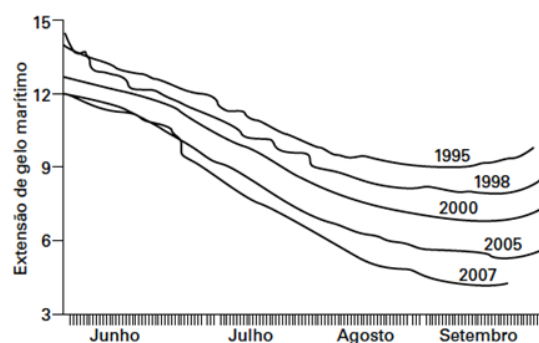
Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

3 - (ENEM 2011): As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R\$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é:



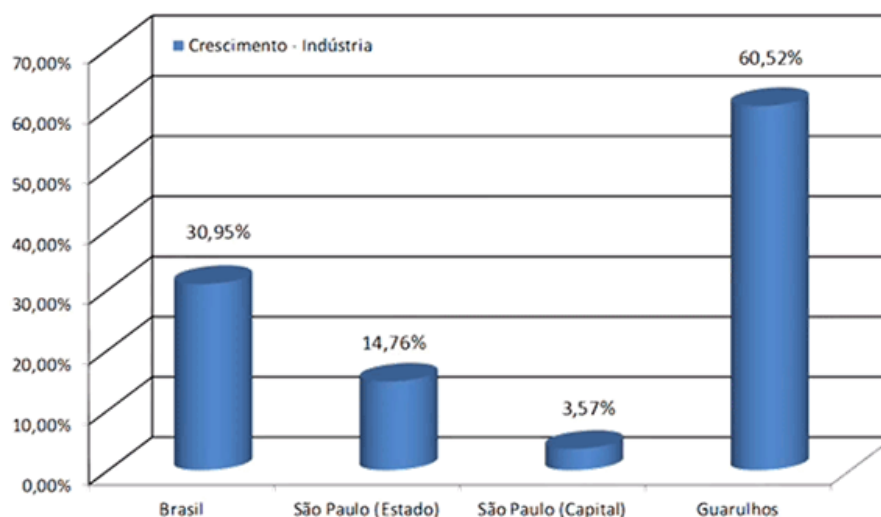
4 - (ENEM 2012): O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007. Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.

Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em:

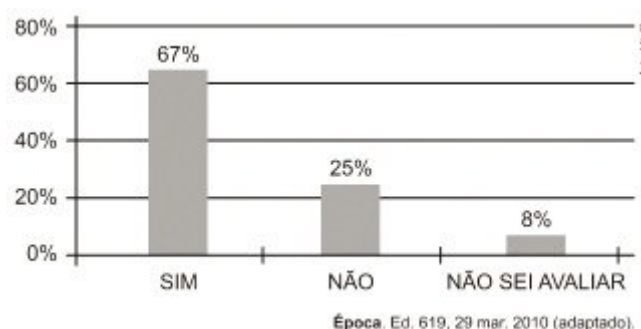


5 - (ENEM 2013): A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico

Analizando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?



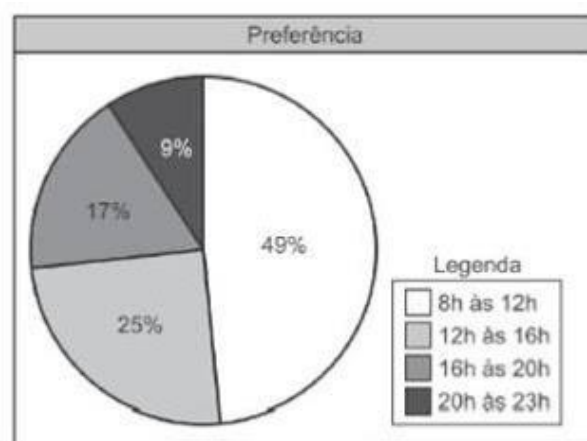
6- (ENEM 2011): Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam “Não” à enquete?

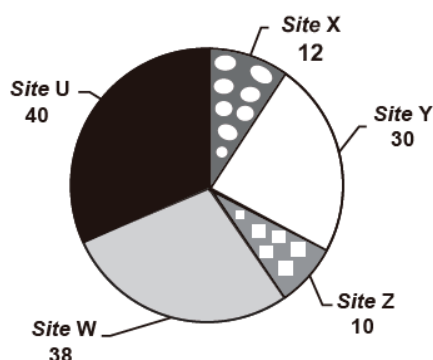
7 - Uma rede de supermercados resolveu fazer uma pesquisa para saber qual horário as pessoas mais gostavam de ir ao supermercado. Foram entrevistadas 2000 pessoas e o resultado está no gráfico abaixo.

Durante qual horário a maioria das pessoas entrevistadas preferem ir ao supermercado?

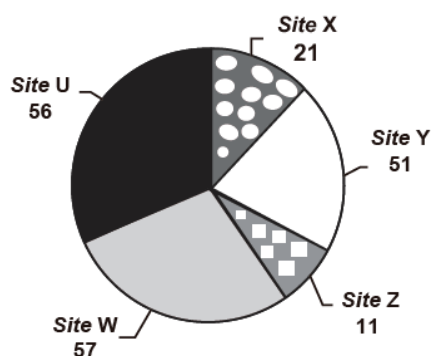


8 - (ENEM 2017): Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um mini aplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco sites visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco sites mais acessados. A seguir, temos os dados do mini aplicativo para esses dias.

Tempo de acesso na sexta-feira (minuto)



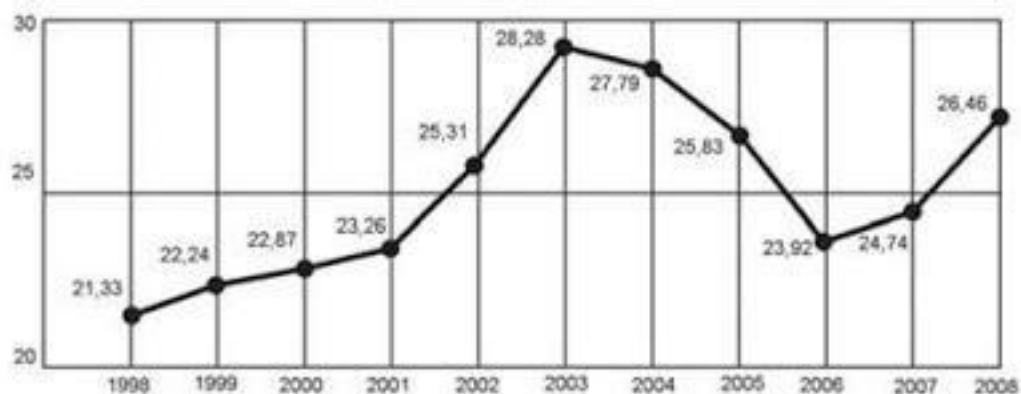
Tempo de acesso no sábado (minuto)



Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi em qual site?

9 - (ENEM 2011): O termo agronegócios não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro



Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre quais anos?

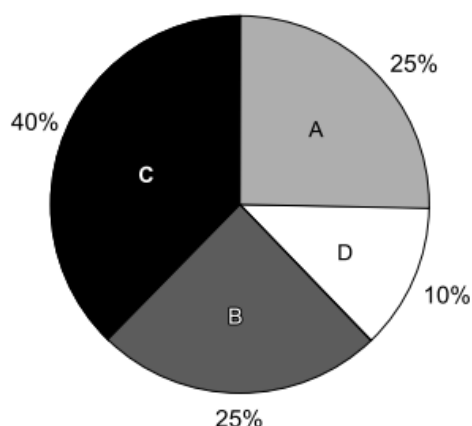
10 - (ENEM 2012): A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual. As empresas que este investidor escolhe comprar são?

11 - (ENEM 2013): Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R\$ 200,00; B = R\$ 300,00; C = R\$ 400,00 e D = R\$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.

O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é



12 - (ENEM 2009): Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

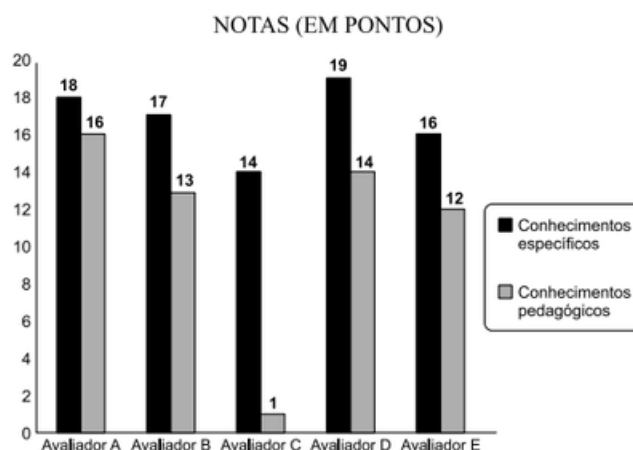
Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe

- a) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
- b) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
- c) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
- d) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
- e) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

13 - (ENEM 2013): As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.

Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é?



14 - (ENEM 2013): Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

15 - (ENEM 2010): O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

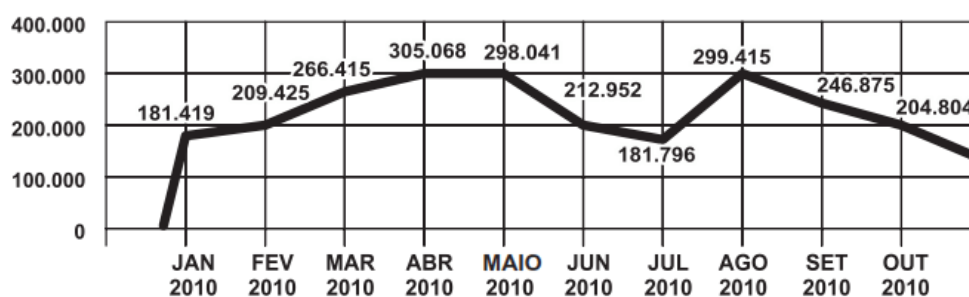
Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

- a) $X = Y < Z$.
- b) $Z < X = Y$.
- c) $Y < Z < X$.
- d) $Z < X < Y$.
- e) $Z < Y < X$.

Lista complementar

1 – (ENEM 2012): O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o Caged, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

BRASIL - Comportamento do Emprego Formal no período de janeiro a outubro de 2010 - CAGED



Disponível em: www.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é

- A) 212 952.
- B) 229 913.
- C) 240 621.
- D) 255 496.
- E) 298 041.

2 - (ENEM 2014): Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior. O candidato aprovado será:

- A) K
- B) L
- C) M
- D) N
- E) P

GABARITO

1 – B

2 – D

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática	
Nome:	Data: / /
Professores: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius	
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 02	

Exercício 1.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, calcule os valores indicados em cada item.

- a) Qual a medida da hipotenusa num triângulo retângulo de catetos de medidas 3 e 4?
- b) Qual a medida do cateto b num triângulo retângulo de hipotenusa medindo 13 e cateto c = 12?

Exercício 2.

A Recíproca do Teorema de Pitágoras, enuncia que:

“se as medidas dos três lados de um triângulo qualquer satisfazem a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo”.

Dentre os ternos (a,b,c) de números inteiros listados, com $a < b < c$, qual(is) dele(s) poderiam ser lados de triângulo(s) retângulo(s)?

- a) (5,12,13).
b) (8,15,17).
c) (7,24,25).
d) (12,35,37).
e) (11,60,61).
f) (20,21,29).
g) (9,40,41).

Exercício 3.

Dentre os ângulos agudos dos triângulos retângulos do exercício 2, qual possui o maior seno?

Exercício 4.

Quais os senos, cossenos e tangentes dos ângulos agudos do triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

Exercício 5.

Um triângulo tem lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm. Outro triângulo tem lados medindo 9 cm, 12 cm e 15 cm. Os ângulos desses triângulos são iguais?

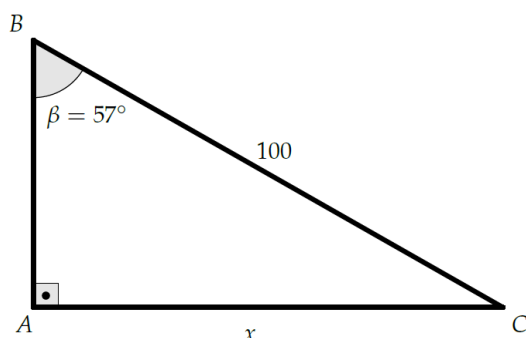
Exercício 6.

Utilizando os dados aproximados da tabela 2, calcule o que se pede.

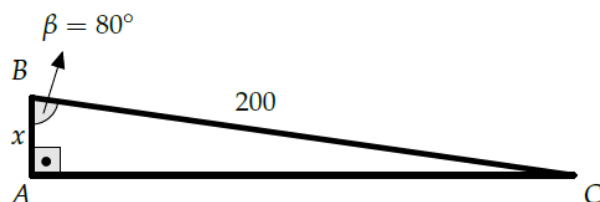
Tabela 2: Senos, cossenos e tangentes.

Arco	sen	cos	tg
15°	0,26	0,97	0,27
20°	0,34	0,93	0,37
30°	0,5	0,87	0,58
40°	0,64	0,77	0,84
57°	0,84	0,54	1,54
80°	0,98	0,17	5,67

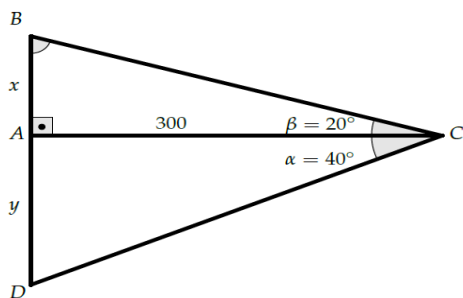
a) Determine valor de $AC = x$.



b) Determine valor de $AB = x$.



c) Determine valor de $BD = x + y$.



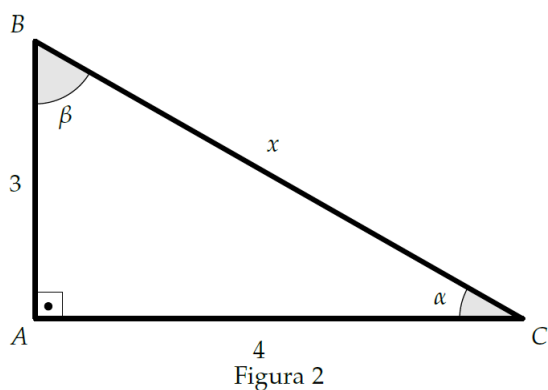
d) Seja o $\triangle ABC$, retângulo em B, com $\hat{B}AC = 15^\circ$ e $D \in AB$ tal que $\angle ADC = 150^\circ$. Sendo $DB = 400$ cm, qual o valor de AC ?

e) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 34 e 93, qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de menor medida?

f) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 26 e 97. Qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de maior medida?

Exercício 7.

No triângulo da figura 2, calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes de α e β .



Exercício 8.

A figura 3 representa um $\triangle ABC$, equilátero, com lado medindo 2 cm e uma altura BH .

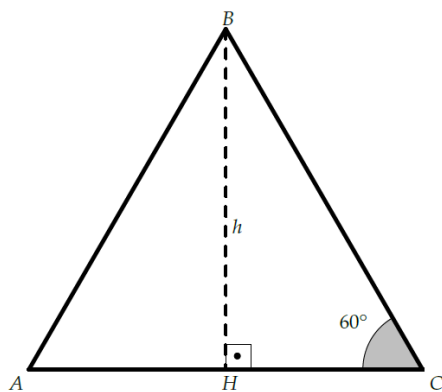


Figura 3

Quais os valores do(a):

a) $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ e $\tan 60^\circ$?

b) $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ e $\tan 30^\circ$?

Exercício 9.

Uma escada rolante liga dois andares de uma loja e tem uma inclinação de 30° . Sabendo que a escada rolante tem 10 m de comprimento, qual é a altura entre os dois andares?

Exercício 10.

A partir de um quadrado de lado medindo 1 cm, determine as medidas do seno, cosseno e da tangente de 45° .

Exercício 11.

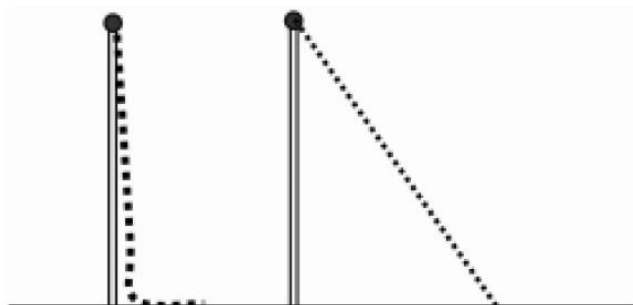
Uma pessoa na margem de um rio vê sob um ângulo de 60° uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta 30 metros esse ângulo diminui para 30° . Qual é a largura do rio?

	30°	45°	60°
sen			
cos			
<u>tan</u>			

Exercício 12.

No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede 3 chih¹. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca no solo a uma distância de 8 chih do pé do bambu. Que comprimento tem o bambu?

(Antiga unidade de medida chinesa, conhecido como “pé chinês”. Seu comprimento é derivado do comprimento do antebraço humano.)



Exercício 13.

Sobre uma rampa de 6 m de comprimento e inclinação de 30° com a horizontal, devem-se construir degraus de altura 25 cm. Quantos degraus desse tipo serão construídos?

Exercício 14.

Ao atender o chamado de um incêndio em um edifício, o corpo de bombeiros de uma cidade utilizou um veículo de combate a incêndio, dotado de escada magirus. Esse veículo possibilita atender a resgates a uma altura máxima de 54 metros, utilizando um ângulo máximo de levantamento de 60° .

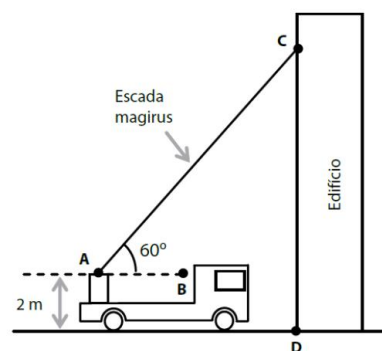


Figura 6

a) Qual o comprimento dessa escada quando totalmente esticada?

b) Houve um problema e o ângulo de levantamento foi reduzido em 25%. Qual a nova altura máxima alcançada?

Exercício 18.

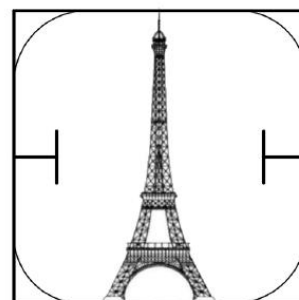
Um observador está em um ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10° com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14° . Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação? Dados: $\operatorname{tg} 10^\circ = 0,1763$ e $\operatorname{tg} 14^\circ = 0,2493$.

Exercício 20.

Uma pessoa de 2 m de altura, passeando pela cidade, caminha em linha reta numa rua horizontal, na direção da portaria de um edifício. A pessoa e olha o topo desse edifício, o que a obriga a olhar para cima num ângulo de 30 graus com a horizontal. Após caminhar 49 m, para uma segunda vez para ver o topo do edifício e tem que olhar para cima num ângulo de 45 graus com a horizontal. Utilize $\sqrt{3} = 1,7$. Nessa situação, qual a altura do prédio?

Exercício 21.

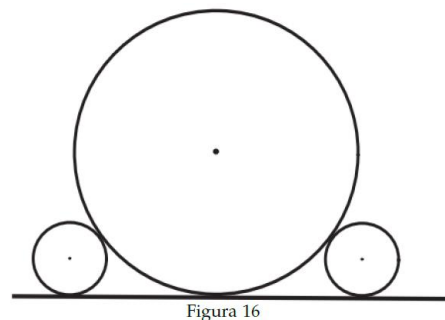
A Torre Eiffel tem 324 m de altura (contando com a antena), e deseja-se fotografá-la completamente usando uma câmera com lente de abertura de 40° . Qual a mínima distância da torre (no plano da sua base) para que uma foto com essa câmera capture a torre inteira, como ilustra a seguir.



Exercício 25.

Três goiabas perfeitamente esféricas de centros C_1 , C_2 e C_3 , e raios 2 cm, 8 cm e 2 cm, respectivamente, estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura 16.

Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?

**Exercício 27.**

Para calcular a altura de um morro, um topógrafo posicionou-se com seu teodolito a 200 m do morro e o aparelho forneceu a medida do ângulo de visada do morro: 30° . O topógrafo, olhando numa tabela, considerou $\text{tg } 30^\circ = 0,57$. Se a altura do teodolito é 1,60 m, qual é a altura, em metros, do morro obtida pelo topógrafo?

- a) 352,48.
- b) 125,60.
- c) 118,20.
- d) 115,60.
- e) 114.

Exercício 28.

Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm. A soma das tangentes dos ângulos agudos é aproximadamente:

- a) 1.
- b) 1,3.
- c) 2.
- d) 2,5.
- e) 2,8.

Exercício 30.

Na figura 20, estão assinalados três ângulos retos, e três ângulos de medida α . Sendo $AB = 1$ e $BC = 5$, o valor de $\cos \alpha$ é

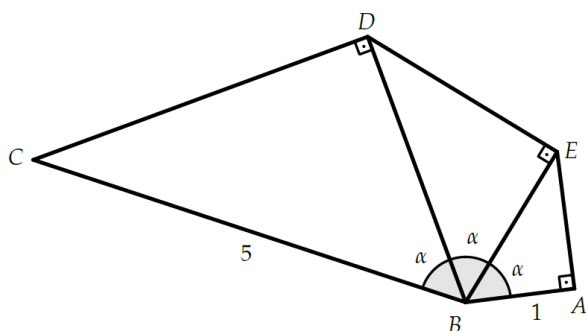


Figura 20

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. c) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$. d) $\sqrt[3]{5}$. e) $\frac{1}{5}$

Exercício 32.

Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30° , conforme a figura 25. A velocidade, em km/h, desse avião era de:

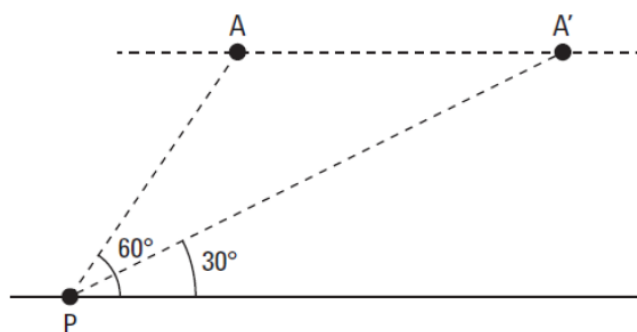


Figura 25

- a) 180.
b) 240.
c) 120.
d) 150.
e) 200.

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática	
Nome:	Data: / /
Professores: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius	
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 03	

Atividade 1:

Faça as seguintes atividades em sequência, na folha que lhes foi dado construa uma reta que passa por O e forma um ângulo alfa medindo 10° com o segmento OB;

- Sob a reta construída determine um segmento OC1 medindo 5 centímetros;
- Sendo a hipotenusa OC1, construa um triângulo retângulo de maneira que o ângulo de 90° esteja no vértice D1, e que este ponto esteja no segmento OB;
- Faça este mesmo procedimento para os ângulos de 20° , 30° , 40° ... 340° , 350° .

Atividade 2:

Com a régua, meça e anote na tabela os valores dos catetos oposto e adjacente para cada ângulo desenhado no exercício anterior.

	Cateto Oposto a α	Cateto Adjacente a α
$\alpha = 10^\circ$		
$\alpha = 20^\circ$		
$\alpha = 80^\circ$		
$\alpha = 70^\circ$		
$\alpha = 100^\circ$		
$\alpha = 110^\circ$		
$\alpha = 160^\circ$		
$\alpha = 170^\circ$		
$\alpha = 190^\circ$		
$\alpha = 200^\circ$		
$\alpha = 280^\circ$		

$\alpha = 290^\circ$		
$\alpha = 300^\circ$		
$\alpha = 310^\circ$		
$\alpha = 350^\circ$		

Atividade 3

Com a calculadora, obtenha e anote na tabela dada os valores do seno e cosseno referente ao ângulo enunciados na **atividade 1**.

	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 70^\circ$
Seno				
Cosseno				
Tangente				

	$\alpha = 100^\circ$	$\alpha = 110^\circ$	$\alpha = 170^\circ$	$\alpha = 160^\circ$
Seno				
Cosseno				
Tangente				

	$\alpha = 190^\circ$	$\alpha = 200^\circ$	$\alpha = 280^\circ$	$\alpha = 290^\circ$
Seno		3420	0,1736	
Cosseno				
Tangente				

	$\alpha = 280^\circ$	$\alpha = 290^\circ$	$\alpha = 300^\circ$	$\alpha = 310^\circ$
Seno				
Cosseno				
Tangente				

Atividade 4

Que figura aparece na **atividade 1** se ligarmos os pontos C1 e C2, C2 e C3 e assim por diante?

Atividade 5

Observando a tabela dada na Atividade 3, o que podemos concluir sobre o seno 10° e o cos 80° ? E sobre o sen 20° e cos 70° ? Justifique sua resposta

Atividade 6

Há outros ângulos que a medida do seno e do cosseno são iguais? Qual a relação entre os ângulos em que a medida do seno e do cosseno, são iguais? Os triângulos são iguais?

Atividade 7

Dada a tabela responda:

	3°	2°	1°	$0,5^\circ$
Seno	0,05233	0,03489	0,01745	0,00872
Cosseno	0,99862	0,99939	0,999847	0,99996

Quanto será o valor do sen a , para a muito próximo de 0° ? Quanto será o valor do cos a , para a muito próximo de 0° ?

Atividade 8

Dada a tabela responda

	87°	88°	89°	$89,5^\circ$
Seno	0,99862	0,99939	0,999847	0,99996
Cosseno	0,05233	0,03489	0,01745	0,00872

Quanto será o valor do sen a , para a muito próximo de 90° ? Quanto será o valor do cosseno a , para a muito próximo de 90° ?

Atividade. 10

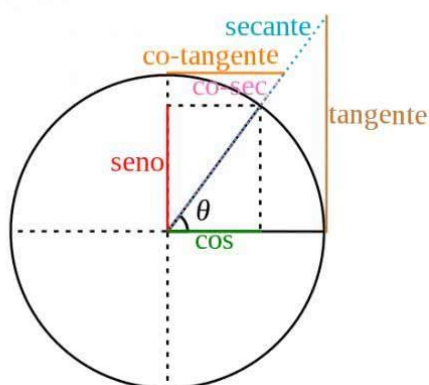
Sejam α e β dois ângulos quaisquer. Se $\beta > \alpha$, então $\sin \alpha > \cos \beta$? Justifique sua resposta.

Atividade 11

Sejam α e β dois ângulos quaisquer. Se $\beta > \alpha$, então $\cos \beta > \sin \alpha$? Justifique sua resposta.

O círculo trigonométrico

O **Círculo Trigonométrico**, também chamado de Ciclo ou Circunferência Trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas.



Podemos estudar tanto seno, cosseno, tangente e etc.

De acordo com a simetria do círculo trigonométrico temos que o eixo vertical corresponde ao seno e o eixo horizontal ao cosseno. Cada ponto dele está associado aos valores dos ângulos.

O círculo trigonométrico é estudado com raio igual a 1, isso favorece no momento que fazemos os cálculos pois a hipotenusa será igual a 1 e os valores de seno e cossenos serão projeções nos eixos.

1º Quadrante: arcos entre 0° e 90° , medidos a partir da origem.

2º Quadrante: arcos entre 90° e 180° , medidos a partir da origem.

3º Quadrante: arcos entre 180° e 270° , medidos a partir da origem.

4º Quadrante: arcos entre 270° e 360° , medidos a partir da origem.

1º Quadrante: seno positivo, cosseno positivos.

2º Quadrante: seno positivo, cosseno negativo.

3º Quadrante: seno negativo, cosseno negativo.

4º Quadrante: seno negativo, cosseno positivos.

Ângulos Notáveis

No círculo trigonométrico podemos representar as razões trigonométricas de um ângulo qualquer da circunferência.

Chamamos de ângulos notáveis aqueles mais conhecidos (30° , 45° e 60°). As razões trigonométricas mais importantes são seno, cosseno e tangente:

Relações trigonométricas			

Atividade 12

Porque eles são notáveis?

Atividade 13

Até o momento trabalhamos com a unidade de medida graus $^\circ$, qual a outra medida que usamos, assinale a(s) unidade de medida que usualmente utilizamos?

- e) Graus Celsius
- f) Kelvin
- g) Radianos
- h) Kg

Radianos do Círculo Trigonométrico

A medida de um arco no círculo trigonométrico pode ser dada em grau ($^\circ$) ou radiano (rad).

- 1 corresponde a $1/360$ da circunferência. A circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas ao centro, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1° .
- 1 radiano corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido.

Sabendo que a circunferência tem raio igual a 1 qual é o perímetro da circunferência??

$$2\pi$$

Atividade 14

Sabendo que $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ faça a conversão para os demais ângulos notáveis.

Exercícios

1. Determine os sinais seno cosseno tangente.

- a) 361° b) 1760° c) 4853° d) 3780°

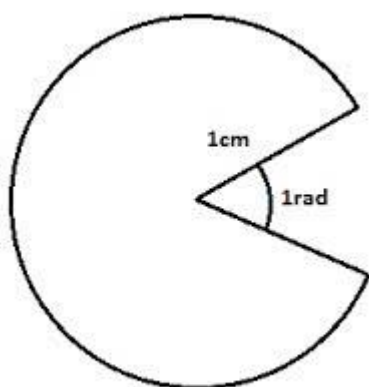
2. Realize as convenções de radianos para graus e reduza para o menor cômputo.

- a) 2π b) $13,25\pi$ c) $9,5\pi$ d) 18π e) $8,45\pi$

3. Realize as convenções de graus para radiano e reduza para o menor cômputo.

- a) 361° b) 1760° c) 4853° d) 3780°

4. (Vunesp-SP) Em um jogo eletrônico o “monstro” tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura.



A parte que falta no círculo é a boca do “monstro”, e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro “do monstro”, em cm, é:

5. Assinale a correspondente, O valor de $\sin 70^\circ$ é:

- a) $\sin 20^\circ$ b) $\tan 20^\circ$ c) $-\sin 20^\circ$ d) $-\cos 20^\circ$ e) $\cos 20^\circ$

6. (PUC-MG) Os moradores de certa cidade costumam fazer caminhada em torno de duas de suas praças. A pista que contorna uma dessas praças é um quadrado de lado L e tem 640 m de extensão; a pista que contorna a outra praça é um círculo de raio R e tem 628 m de extensão. Nessas condições, o valor da razão R/L é aproximadamente igual a:

Use $\pi = 3,14$.

7. (U.F.Pelotas-RS) Nossa época, marcada pela luz elétrica, por estabelecimentos comerciais abertos 24 horas e prazos apertados de trabalho, que muitas vezes exigem o sacrifício dos períodos de sono, pode muito bem ser considerada a era do bocejo. Estamos dormindo menos. A ciência mostra que isso contribui para a ocorrência de males como diabetes, depressão e obesidade. Por exemplo, quem não segue a recomendação de dormir no mínimo de 8 horas por noite, tem 73% mais risco de se tornar obeso. (Revista Saúde, n.º 274, junho de 2006 - adaptado).

Uma pessoa que durma à zero hora e siga a recomendação do texto apresentado, quanto ao número mínimo de horas diárias de sono, acordará às 8 horas da manhã. O ponteiro das horas, que mede 6 cm de comprimento, do despertador dessa pessoa, terá descrito, durante seu período de sono, um arco de circunferência com comprimento igual a:

Use $\pi = 3,14$.

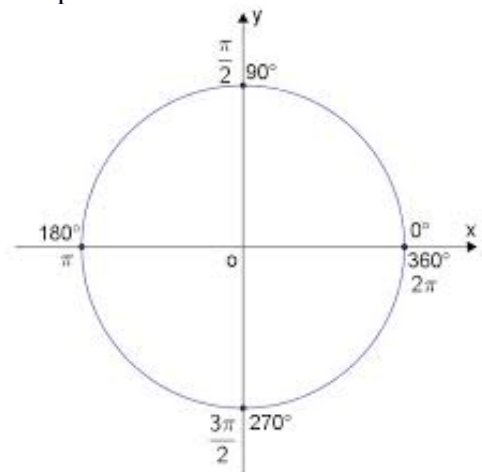
8. (UFRS) Os ponteiros de um relógio marcam duas horas e vinte minutos. O menor ângulos entre os ponteiros é:

9. (UF-GO) Por volta de 250 a.C., o matemático grego Erastóstenes, reconhecendo que a Terra era esférica, calculou sua circunferência. Considerando que as cidades egípcias de Alexandria e Syena se localizavam em um mesmo meridiano, Erastóstenes mostrou que a circunferência da Terra media 50 vezes o arco de circunferência do meridiano ligando essas duas cidades. Sabendo que esse arco entre as cidades media 5000 estádios (unidade de medida utilizada na época), Erastóstenes obteve o comprimento da circunferência da Terra em estádios, o que corresponde a 39 375 km no sistema métrico atual.

De acordo com estas informações, a medida em metros, de um estádio era:

10. Qual é o ângulo, em graus, entre os ponteiros de um relógio analógico se ele marca 10h10'?

11. Coloque no círculo os ângulos notáveis e seus correspondentes.



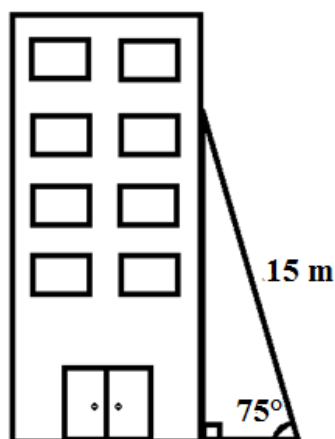
PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática	
Nome:	Data: / /
Professores: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius	
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 04	

Exercício 1: Se $\cos \beta = 1/4$ e β pertence ao 4º quadrante, determine o valor de $\sin \beta$:

Exercício 2: Se $\cos x = -12/13$ e $\pi < x < 3\pi/2$, então $\sin x$ é igual a:

Exercício 3: Se $\sin(x) = 1/3$ e $\pi/2 < x < \pi$, então o valor de $\cos(x)$ é:

ATIVIDADE: Durante um incêndio em um prédio, os bombeiros precisavam chegar ao terceiro andar para resgatar alguns moradores que não haviam conseguido escapar. Então, utilizaram uma escada de 10 metros de comprimento para alcançarem o andar desejado. Ao posicionarem a escada, percebeu-se que o ângulo formado entre a escada e o solo era de 75° , conforme o esquema abaixo:



Posicionando a escada dessa maneira, que altura os bombeiros conseguiram atingir?

Exercício 4: Se $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, para dois arcos a e b , então qual o $\sin(2a)$?

- a) $\sin a \cos a$.
- b) $2 \sin a \cos a$.
- c) $\sin a \cos a / 2$.
- d) $\sin a + \cos a$.
- e) $\sin a - \cos a$.

Exercício 5: Sejam dois ângulos a e b , tais que $\sin a = 3/5$, $\cos a = 4/5$, $\sin b = 5/13$ e $\cos b = 12/13$. Quanto vale $\sin(a + b)$?

Exercício 6: Qual é o valor de $\sin 15^\circ$?

Exercício 7: Quanto vale $\cos 15^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ$?

Exercício 8: Se $\operatorname{tg} a = 2$, então $\operatorname{tg}(2a)$ é:

Exercício 9: Calcule $\cos(\pi/12)$ e $\operatorname{tg}(\pi/12)$:

Exercício 10: Determine $\cos 105^\circ$:

Exercício 11: O valor de $\cos 735^\circ$ é:

MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 05

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática.	
NOME:	DATA: / /
PROFESSORES: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius	
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 05	

1 – Sabendo que a posição de cada estudante corresponde a um par de coordenadas.

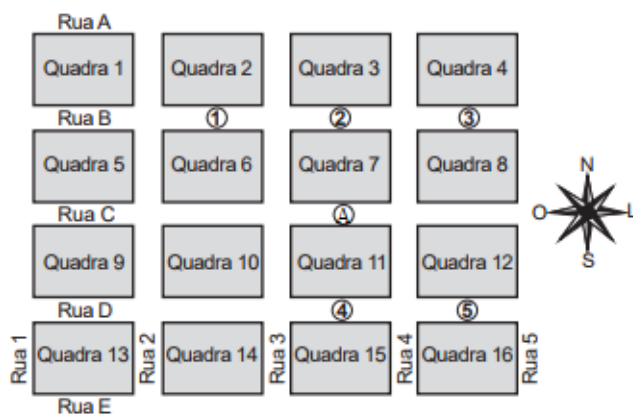
Determine a distância entre os seguintes estudantes:

- $(-1,1)$ e $(2,1)$
- $(-2,0)$ e $(1,0)$
- $(0,-2)$ e $(0,2)$
- $(2,2)$ e $(2,-2)$
- $(3,2)$ e $(-3,-2)$
- $(-1,-1)$ e $(1,2)$
- $(-2,2)$ e $(2,1)$
- $(-3,2)$ e $(3,0)$
- $(-3,-2)$ e $(0,0)$

2 - Os professores Johny e Vinicius passaram nas carteiras ajudando alguns estudantes. O professor Johny atendeu os seguintes estudantes localizados nas coordenadas $(3,-2)$, $(3,-1)$, $(1,0)$, $(0,2)$ respectivamente já o professor Vinicius atendeu os seguintes estudantes $(-3,0)$, $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,-2)$, $(-3,2)$ respectivamente. Partindo dessas informações qual seria a diferença entre as distâncias percorridas pelos professores Johny e Vinicius?

(Obs: utilize o mapa como guia)

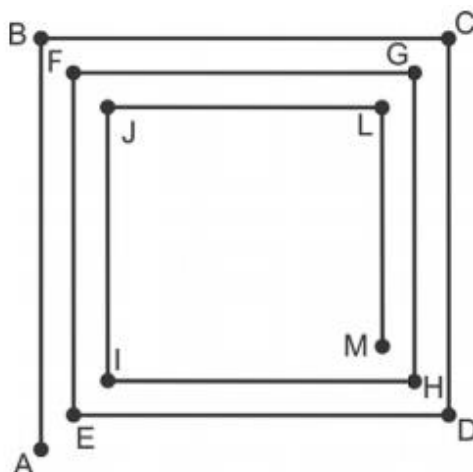
3 - (Adaptado ENEM 2017): Um menino acaba de se mudar para um novo bairro e deseja ir à padaria. Pediu ajuda a um amigo que lhe forneceu um mapa com pontos numerados, que representam cinco locais de interesse, entre os quais está a padaria. Além disso, o amigo passou as seguintes instruções: a partir do ponto em que você se encontra, representado pela letra A, ande para oeste, vire à direita na primeira rua que encontrar, siga em frente e vire à esquerda na próxima rua. A padaria estará logo a seguir.



α - Em qual ponto numerado está a padaria?

β - Se considerarmos as coordenadas (x_A, y_A) para o ponto A, e as coordenadas (x_B, y_B) para o ponto que representa a padaria, qual seria a distância d entre seu ponto de partida e a padaria?

4 - (ENEM 2011): Considere que o esquema represente uma trilha poligonal que Carlos deve percorrer, partindo do ponto A até chegar ao ponto M

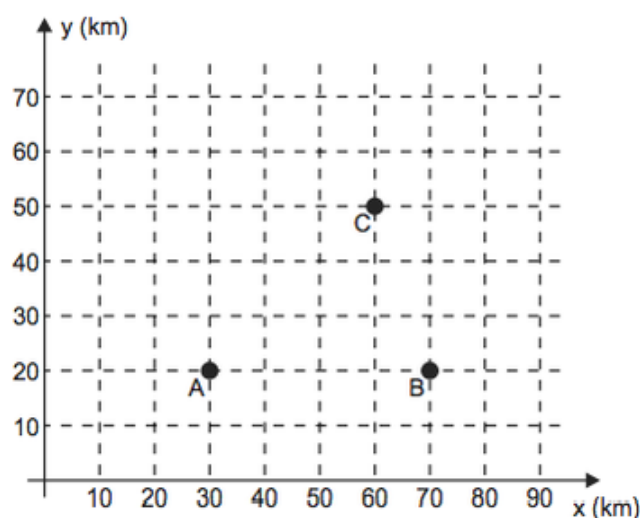


Sabendo que o segmento AB possui 11 m de comprimento e, a partir desse, o comprimento de cada segmento seguinte possui um metro a menos que o comprimento do segmento anterior, quantos metros Carlos terá caminhado ao percorrer toda a trilha?

5 - Determinar o estudante equidistante da origem e dos estudantes $I = (2,0)$ e $C = (0,2)$

6 - Sejam $M_1 = (3,0)$, $M_2 = (1,1)$ e $M_3 = (1,-1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo a partir das coordenadas dos pontos médios.

7 - (ENEM 2013): Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



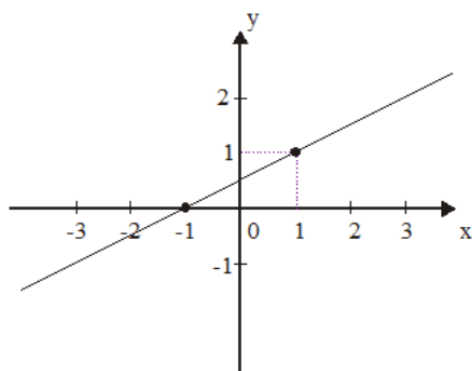
A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. Qual o local adequado para a construção dessa torre?

SALA 37

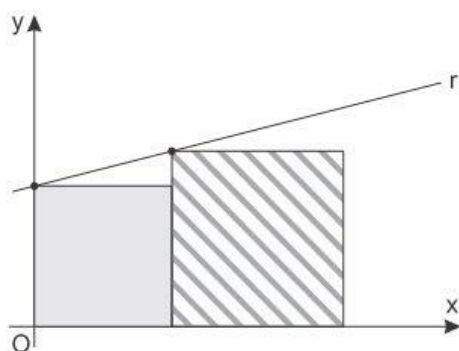
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 06

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática	
Nome:	Data: / /
Professores: Johnny, Luiz, Lucas e Vinicius	
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 06	

Atividade 1: Determine a equação da reta cujo gráfico está representado no plano cartesiano abaixo.



Atividade 2: Na figura abaixo estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:



Atividade 3: Calcule o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos: A(-1, 3) e B(-4, -3); C(3, 2) e D(-3, -1); E(2, -3) e F(-4, 3).

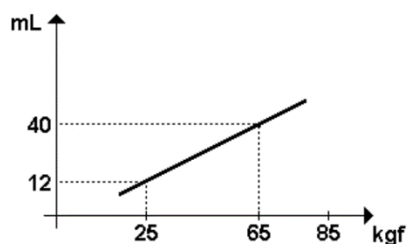
Atividade 4: Dada a reta que tem a equação $2x + 4y = 9$, determine seu coeficiente angular.

Atividade 5: A equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(0, 1) e B(6, 8) é dada por? (determine o coeficiente angular e linear)

Atividade 6: A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos A(1, 5) e B(4, 14) é:

Atividade 7: A reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB com A=(0,3) e B=(5,0) tem qual coeficiente angular?

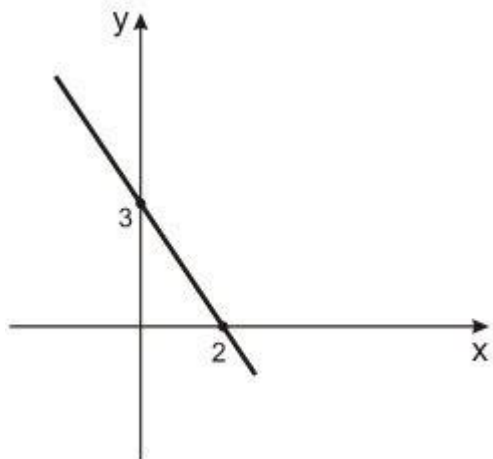
Atividade 8: Na figura a seguir, tem-se o gráfico de uma reta que representa a quantidade, medida em mL, de um medicamento que uma pessoa deve tomar em função de seu peso, dado em kgf, para tratamento de determinada infecção. O medicamento deverá ser aplicado em seis doses.



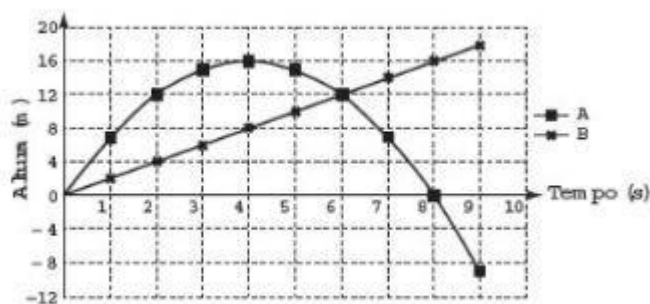
Assim, uma pessoa que pesa 85kgf receberá em cada dose:

Atividade 9: A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos A(1, 5) e B(4, 14) é:

Atividade 10: equação da reta, representada no gráfico abaixo, é:



Atividade 11: Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá:

- a) diminuir em 2 unidades.
- b) diminuir em 4 unidades.
- c) aumentar em 2 unidades.
- d) aumentar em 4 unidades.
- e) aumentar em 8 unidades

Atividade 12: Os segmentos de reta são as únicas figuras geométricas sobre as quais é possível calcular distância. Assim, é possível definir a distância entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ como:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Qual a distância entre os pontos C e D cujas coordenadas são $C(2, 5)$ e $D(10, 15)$?

Atividade 13: Dadas as retas r e s, determinadas respectivamente pelas equações $2x + y = 3$ e $3x - 4y = -23$, é correto afirmar que r e s são retas:

- a) concorrentes
- b) iguais
- c) paralelas
- d) perpendiculares

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática.
NOME: DATA: / /
PROFESSORES: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 07

Vulcões

Vulcões

O vulcão de Nishinoshima está situado próximo a ilha Rosário uma pequena ilha oceânica isolada a oeste de Hahajima e ao norte do Grupo Vulcano das ilhas Ogasawara do Japão.

A ilha possui um vulcão ativo cuja última grande erupção ocorreu nos anos de 1973 - 1974, alargando substancialmente a ilha para Oeste e elevando o seu cume até aos 52 m acima do nível médio do mar. Ao longo das últimas décadas ocorreram diversas pequenas erupções submarinas em torno da ilha.

O vulcão permanece ativo com pequenas erupções contínuas, em 2014 o vulcão tinha 290 metros quadrados, em abril de 2017 a guarda costeira japonesa confirmou que uma erupção ocorreu na cratera central da ilha deixando maior com treze vezes o seu tamanho original, chegando próxima de 2,8 km².

Uma pesquisa aérea conduzida no início de maio de 2017 descobriu que as erupções continuaram liberando fumaça cinza a cerca de 500 metros no ar.

Atividade 1: O vulcão de Nishinoshima está centrado na origem. Sabendo que F é o ponto da circunferência que define a maior distância alcançada pelo vulcão e que sua área real era de 81 m^2 .

- d) Qual a proporção do gráfico.
- e) Qual é o raio da circunferência. (Use aproximação de uma casa decimal).
- f) Qual diâmetro da circunferência que define a maior distância alcançada pelo vulcão, nos valores (reais).



Atividade 2: Sabendo que este vulcão cresce em média 810 m^2 por ano, quantos anos ele vai sobrepor a ilha chegando no ponto E.

Circunferência

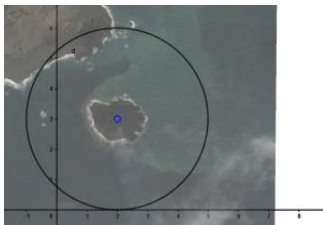
Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo desse mesmo plano, denominado centro da circunferência:

Exemplo: Em uma circunferência de diâmetro 3, a que distância os postos da circunferência estão do centro?

Atividade 3: Escreva a equação da circunferência quando o vulcão está centralizado em $(0,0)$

Atividade 4: Por segurança os navios devem ficar a certa distância do vulcão. Conhecendo o centro e um ponto é possível determinar a circunferência que representa a faixa de segurança? Centro $A = (2,3)$ e $B = (5,3)$.

- c) Qual é o raio de segurança.
- d) Determine a equação da circunferência.



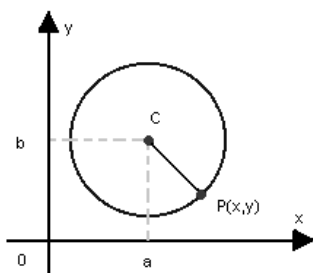
Atividade 5: A partir da Atividade 4 determine os casos onde um navio de pesquisadores que estão estudando o vulcão estaria em risco, na faixa limite ou fora de risco.

- e) (2,1)
- f) (5,2)
- g) (2,6)
- h) (2,4)

Equações da circunferência

Equação reduzida

Seja $C(a, b)$ o centro e $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência, a distância de C a P (d_{CP}) é o raio dessa circunferência. Então:



$$d_{cp} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

r^2

Portanto, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a equação reduzida da circunferência e permite determinar os elementos essenciais para a construção da circunferência: as coordenadas do centro e o raio. Observação: Quando o centro da circunferência estiver na origem $C(0,0)$, a equação da circunferência será $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação geral

Desenvolvendo a equação reduzida, obtemos a equação geral da circunferência:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Exemplo:

vamos determinar a equação geral da circunferência de centro $C(2, -3)$ e raio $r = 4$.

A equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Determinação do centro e do raio da circunferência

Dada a equação geral de uma circunferência, utilizamos o processo de fatoração de trinômio quadrado perfeito para transformá-la na equação reduzida e, assim, determinamos o centro e o raio da circunferência. Para tanto, a equação geral deve obedecer a duas condições:

- Os coeficientes dos termos x^2 e y^2 devem ser iguais a 1;
- Não deve existir o termo xy .

Exemplo:

vamos determinar o centro e o raio da circunferência cuja equação geral é $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$. Observando a equação, vemos que ela obedece às duas condições. Assim:

1º passo: agrupamos os termos em x e os termos em y e isolamos o termo independente

$$x^2 - 6x + _ + y^2 + 2y + _ = 6$$

2º passo: determinamos os termos que completam os quadrados perfeitos nas variáveis x e y , somando a ambos os membros as parcelas correspondentes

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 6 + 9 + 1$$

3º passo: fatoramos os trinômios quadrados perfeitos

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

4º passo: obtida a equação reduzida, determinamos o centro e o raio.

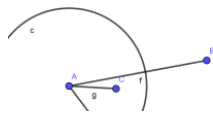
$$a = 3 \quad b = -1 \Rightarrow C(3, -1) \quad r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

Assim, para determinar a posição de um ponto $P(m, n)$ em relação a uma circunferência, basta determinar o raio da circunferência e em seguida calcular a distância do centro da circunferência ao ponto $P(m, n)$.

Se $d - r > 0$, então é ponto exterior (como o exemplo ao lado b é exterior).

Se $d - r = 0$, então é ponto da

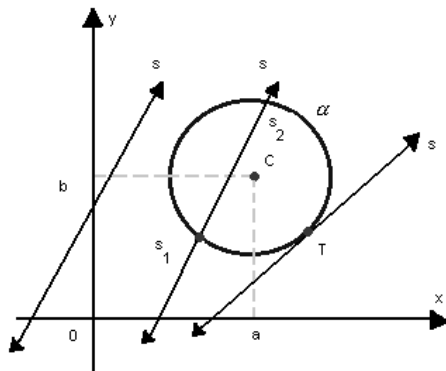


circunferência.

Se $d - r < 0$, então é ponto interior.

Posição de uma reta em relação a uma circunferência

Dadas uma reta $s: Ax + Bx + C = 0$ e uma circunferência α de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, vamos examinar as posições relativas entre s e α :



$$s \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow s \text{ é exterior a } \alpha$$

$$s \cap \alpha = \{T\} \Rightarrow s \text{ é tangente a } \alpha$$

$$s \cap \alpha = \{s_1, s_2\} \Rightarrow s \text{ é secante a } \alpha$$

Também podemos determinar a posição de uma reta em relação a uma

circunferência calculando a distância da reta ao centro da circunferência. Assim, dadas a reta $s: Ax + By + C = 0$ e a circunferência $\alpha: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$$d_{C_s} = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Assim:

Se $d - r > 0$, então é reta exterior (como o exemplo ao lado b é exterior).

Se $d - r = 0$, então é reta tangente a circunferência.

Se $d - r < 0$, então é reta secante a circunferência.

Exercícios

1. O centro de uma circunferência é o ponto médio do segmento AB, sendo A (4; -7) e B(-8; -3). Se o raio dessa circunferência é 3, determine sua equação.
2. (PUC-SP) O ponto **P**(3, b) pertence à circunferência de centro no ponto **C**(0, 3) e raio 5. Calcule o valor da coordenada **b**.
3. (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(2, 1) e que passa pelo ponto A(1, 1).
4. Qual a distância entre os pontos da reta $0=y-2x-400$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 400$?
5. Um cargueiro precisou mudar sua rota para próximo de um vulcão subaquático. O cargueiro recebeu as coordenadas exatas do vulcão após ter chegado ao porto. Algumas coordenadas foram anotadas durante a viagem. Dadas as coordenadas descreva se acaso o navio chegou a correr riscos?
Coordenadas do vulcão C(5,5).
O vulcão apresentava perigo em uma área de 16π em seu redor. As coordenadas anotadas durante a viagem foram
 - E(12,1) P(8,2) G(6,3) T(7,6) Y(7, 8.46) M(7,10)Determine uma reta que não na qual o navio não corresse perigo.

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática.

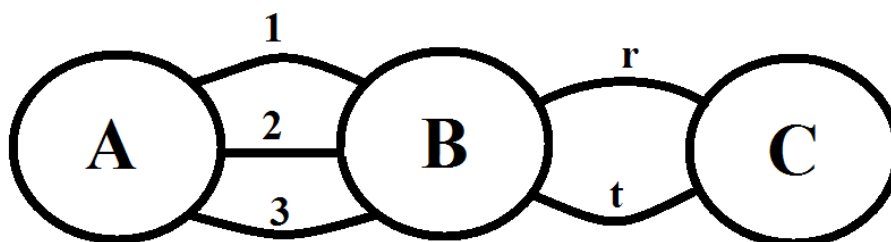
NOME:

DATA: / /

PROFESSORES: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius

MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 08

Atividade 1: As cidades A e B são ligadas pelas estradas 1, 2 e 3, e as cidades B e C são ligadas pelas estradas 'r' e 't', conforme a figura abaixo:



De quantas maneiras diferentes podemos ir de:

- “A” até “C”?
- “A” até “C” e depois voltar para “A”?
- “A” até “C” e depois voltar para “A”, sem repetir estradas?

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Se há x modos de se tomar uma decisão A e, tomada essa decisão A, há y modos de se tomar uma decisão B, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões A e B é igual ao produto $x.y$.

Exercício 1: Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pinturas estão indicadas a seguir:

Exemplo 1: verde, amarelo, bege, verde, cinza;

Exemplo 2: verde, cinza, verde, bege, cinza.

Quantas são as possibilidades?

Exercício 2: Quantos são os números de 3 algarismos distintos?

Exercício 3: Quantos são os números de 4 algarismos formados apenas por algarismos pares?

Exercício 4: Em uma competição de atletismo, participam 8 corredores. De quantas maneiras diferentes pode ser composto o pódio com os três primeiros colocados?

Exercício 5: Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, podem-se formar quantos números:

- a) de quatro algarismos?
- b) de quatro algarismos distintos?
- c) ímpares de três algarismos distintos?

Atividade 2: Quando o assunto é política, Fernanda adora. Nesse ano de eleições para Presidente da República, estão concorrendo os candidatos A, B, C, D e E. Fernanda já tem o seu voto definido há muito tempo, porém, resolveu pensar em qual candidato ela votaria se tivesse que mudar de escolha caso, por exemplo, o candidato escolhido por ela tomasse uma facada e morresse antes da eleição. Então, Fernanda elencou os 5 concorrentes à presidência de acordo com a preferência de voto, sendo o 1º da lista aquele em que ela prefere votar e o 5º aquele em que ela menos gostaria de votar. De quantas maneiras Fernanda poderia listar os 5 candidatos?

Seja um número natural n , denotamos o fatorial de n por $n!$, que se define da seguinte forma:

$n!$ = o produto de todos os números inteiros de 1 até n , se $n \geq 2$.

- $0! = 1$.
- $1! = 1$.

Exercício 6: De quantas formas se pode dispor 4 pessoas em uma fila indiana?

Exercício 7: Quantos são os anagramas da palavra MATRIZ?

Exercício 8: Luiz precisa trocar a lâmpada da sala, lavar a louça, estudar para a prova de matemática e arrumar seu quarto. De quantas maneiras diferentes ele pode executar essa sequência de atividades?

Exercício 9: Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, quantos números de 5 algarismos podemos formar, sem repeti-los?

Exercício 10: Escreva todos os anagramas com as letras da palavra BOLA que começam com a letra L:

Atividade 3: Quantos são os anagramas da palavra ASA? E da palavra MOTO? E da palavra ARARA? Escreva todas as possibilidades de palavras formadas para conferir a resposta.

Exercício 11: Com dois algarismos 1, dois algarismos 2 e três algarismos 3, quantos números de sete algarismos podem ser formados?

Exercício 12: Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ARQUIMEDES que começam e terminam com a letra E?

Exercício 13: De quantas maneiras podemos alinhar 8 moedas sobre uma mesa, sendo 4 de R\$0,25 e 4 de R\$0,50?

Exercício 14: Quantos anagramas da palavra BANANADA começam com a letra B?

Exercício 15: Quantos são os anagramas da palavra BATATA nos quais:

- a) as vogais estejam sempre juntas?
- b) vogais e consoantes estejam intercaladas?

MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 09

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática.	
NOME:	DATA: / /
PROFESSORES: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius	
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 09	

Problema 1: Considerando um grupo com 10 pessoas, de quantas maneiras possíveis pode-se formar uma fila composta por:

- 5 pessoas?
- 6 pessoas?
- 7 pessoas?
- 8 pessoas?
- 9 pessoas?
- 10 pessoas?

Organize os dados na tabela abaixo.

Nº de pessoas	Possibilidades		
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

A partir desses dados o que podemos observar?

Se ao invés de 10 pessoas tivéssemos n pessoas e quiséssemos formar uma fila com p pessoas. De quantas maneiras possíveis poderíamos formar esta fila?

Problema 2: Qual o total de placas de carro que podem ser construídas com sete símbolos, sendo os três primeiros constituídos por letras e os quatro últimos por algarismos? (considere para esse problema o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9).

Problema 3: Quantas saladas contendo exatamente três frutas podemos formar se dispomos de 12 frutas diferentes?

Exercícios

1 - (UNIOESTE 2012): Quantas palavras podemos formar, independente se tenham sentido ou não, com as 9 letras da palavra BORBOLETA?

2 - (UNIOESTE 2011): Em um determinado país as placas dos automóveis são constituídas por três vogais e quatro algarismos. Num acidente de trânsito, o motorista culpado dirigia em alta velocidade e após a colisão fugiu rapidamente. No entanto, pessoas que passavam pelo local testemunharam afirmando que a placa era constituída de três letras distintas e quatro algarismos diferentes e embora não tenham conseguido anotar a placa na íntegra, afirmaram que o algarismo da unidade era 2. Diante disso, qual o número de veículos suspeitos que a polícia terá que investigar?

3 - (UNIOESTE 2011): Quantos números inteiros não negativos inferiores a 1000, com algarismos todos diferentes, existem no sistema de numeração decimal?

4 - (UFMG) A partir de um grupo de 14 pessoas, quer-se formar uma comissão de oito integrantes, composta de um presidente, um vice-presidente, um secretário, um tesoureiro e quatro conselheiros. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode compor essa comissão?

O Jogo do Quadrado

O Jogo do Quadrado utiliza o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha. Os movimentos e as capturas de suas peças possuem algumas semelhanças com as peças peão e torre do jogo de xadrez. Descrevemos a seguir os materiais necessários, o objetivo e as regras do jogo.

MATERIAL: Tabuleiro 3x3 e duas peças distintas, uma para cada jogador.

INÍCIO DO JOGO: O jogo é disputado por dois jogadores, cada qual tem apenas uma peça. O Jogador 1 coloca a sua peça na extremidade esquerda inferior do tabuleiro e o Jogador 2

coloca a sua peça na extremidade direita superior do tabuleiro. O jogo é iniciado pelo Jogador 1, que é escolhido através de sorteio.

OBJETIVO: Eliminar a peça ou chegar ao ponto de partida de seu adversário.

REGRAS:

- 1ª) Não pode voltar ao ponto de partida;
- 2ª) É permitida a eliminação da peça do adversário somente na diagonal e as peças se movem apenas uma casa na vertical ou uma casa na horizontal;
- 3ª) A eliminação da peça adversária, tal como a ocupação do ponto de partida do adversário, será obrigatória quando for à ocasião.

NÚMERO DE MOVIMENTOS: O número máximo de movimentos permitido para as peças é de 8 (oito). Quando ocorrerem 8 movimentos das peças e não finalizar o jogo, define-se um empate, mesmo que no nono movimento haja vencedor, somente vale o resultado do oitavo movimento.

VITÓRIA: Vence o jogo o primeiro jogador a eliminar a peça adversária ou ocupar o quadrado do ponto de partida do outro competidor.

		INÍCIO JOGADOR II
INÍCIO JOGADOR I		

SITUAÇÃO 1. Suponha que após o 4o movimento a peça do Jogador 1 esteja no quadrado 1, a do Jogador 2 esteja no quadrado 9 e que, neste momento, é a vez do Jogador 1 efetuar o seu movimento. Para garantir a vitória este jogador deve posicionar sua peça em qual quadrado?

SITUAÇÃO 2. Após o segundo movimento do Jogo do Quadrado o tabuleiro encontra-se na disposição apresentada na figura 5.

Obs: Jogador I (x); Jogador II (o).

	o	
	x	

Em quantos movimentos o jogo termina mais rápido? Quem vence? Pelas regras do jogo o próximo movimento (terceiro) é do Jogador 1.

MATERIAL DO ESTUDANTE Nº 10

PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática.	
NOME:	DATA: / /
PROFESSORES: Johnaton, Luiz, Lucas e Vinicius	
MATERIAL DO ESTUDANTE Nº10	

1. Explique o que é probabilidade.
2. No lançamento de dois dados, determine o espaço amostral.
3. No lançamento de dois dados qual a probabilidade de ocorrer o evento A: {números iguais}?
4. Qual a probabilidade de ocorrer o evento B: {a soma das faces voltadas para cima ser maior que 6}?
5. Suponhamos que a cor dos olhos seja estabelecida por pares de genes, onde C seja dominante para olho escuro e c recessivo para olho claro. Um homem que possua os olhos escuros, mas com mãe de olhos claros, casou-se com uma mulher de olhos claros cujo pai possui olhos escuros. Determine a probabilidade de nascer uma criança de olhos escuros.
6. De uma urna com 10 bolinhas numeradas de 1 a 10 retira-se ao acaso uma bolinha. Determine o espaço amostral e determine qual a probabilidade dessa bolinha ter o número divisível por dois ou por três?
7. (ENEM 2011) - Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de

São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

CAMPANHA DE VACINAÇÃO CONTRA A GRIPE SUÍNA		
DATAS DE VACINAÇÃO	PÚBLICO – ALVO	QUANTIDADE DE PESSOAS VACINADAS
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças Crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

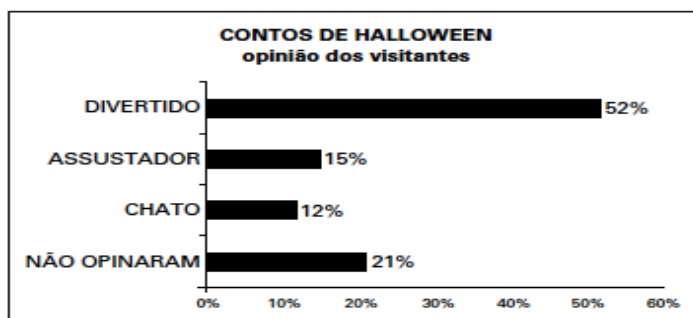
Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

8. (ENEM 2011): Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

9. (UNIOESTE): Dois dados não viciados são lançados simultaneamente. Considerando os números correspondentes às faces voltadas para cima, é correto afirmar que

- (a) a probabilidade de a soma ser par é igual a 50%.
- (b) a probabilidade de o produto ser par é igual a 50%.
- (c) a probabilidade de obter 3 em pelo menos uma das faces é igual a $\frac{1}{3}$.
- (d) a probabilidade de obter o mesmo resultado nos dois dados é igual a $\frac{1}{18}$.
- (e) a probabilidade de obter dois seis é igual a $\frac{1}{12}$

10. (ENEM): Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas relações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por